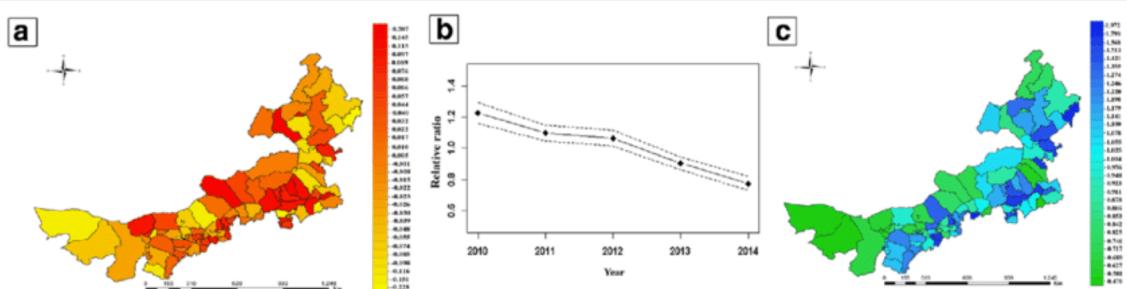
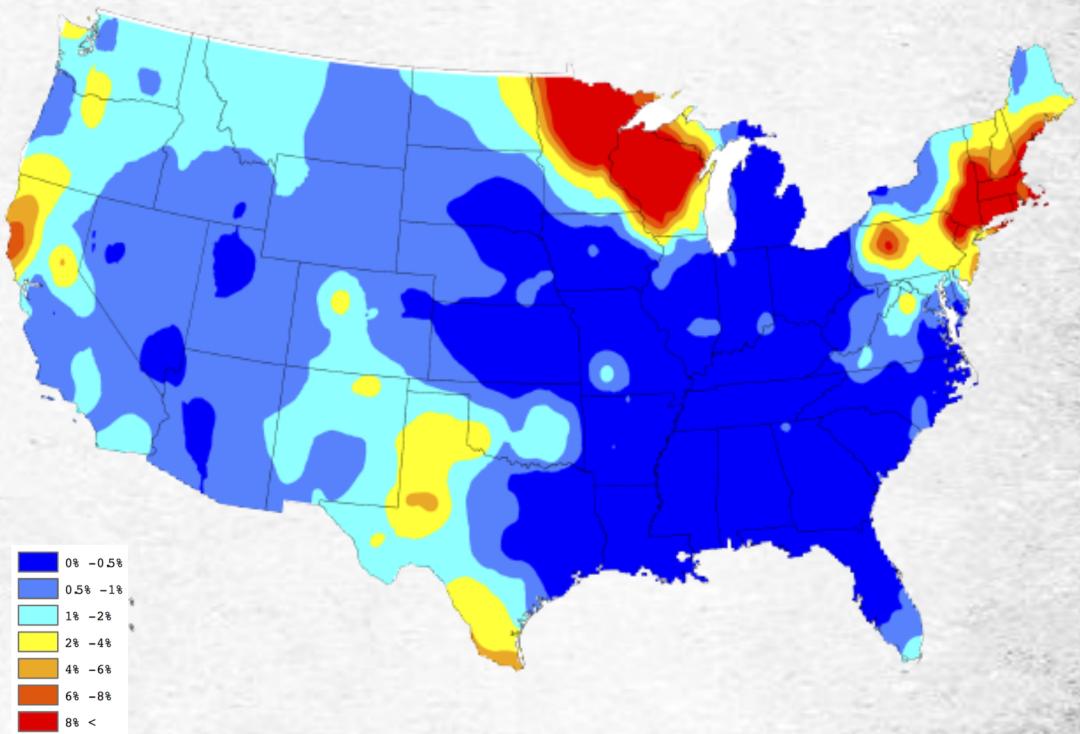


PEMODELAN *BAYESIAN SPASIO TEMPORAL* UNTUK KASUS EPIDEMIK



PEMODELAN

BAYESIAN SPASIO TEMPORAL

UNTUK KASUS EPIDEMIK

Mukhsar
Gusti Ngurah Adhi Wibawa
Andi Tenriawaru



PEMODELAN BAYESIAN SPASIO TEMPORAL UNTUK KASUS EPIDEMIK

Indramayu © 2022, Penerbit Adab

Penulis: Mukhsar, Gusti Ngurah Adhi Wibawa, dan Andi Tenriawaru

Editor: Nia Duniawati

Desain Cover: Nurul Musyafak

Layouter: Fitri

Diterbitkan oleh Penerbit Adab

CV. Adanu Abimata

Anggota IKAPI: 354/JBA/2020

Jl. Kristal Blok H2 Pabean Udk Indramayu Jawa Barat

Kode Pos 45219 Telp: 081221151025

Surel: adanuabimata@gmail.com

Web: <https://Penerbitadab.id>

Referensi | Non Fiksi | R/D

x + 126 hlm. ; 15,5 x 23 cm

No ISBN: 978-623-497-085-2

Cetakan Pertama, November 2022



Hak Cipta dilindungi undang-undang.

Dilarang memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini dalam bentuk apapun, secara elektronis maupun mekanis termasuk fotokopi, merekam, atau dengan teknik perekaman lainnya tanpa izin tertulis dari penerbit.

All right reserved

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami ucapan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat dan anugerah-Nya, karena buku pemodelan Bayesian untuk kasus epidemiologi secara spasial dan temporal telah selesai disusun.

Buku ini diharapkan menjadi referensi bagi peneliti atau para akademisi yang tertarik menggunakan pemodelan Bayesian untuk kasus-kasus penyebaran penyakit menular. Buku ini disusun step by step mulai dari proses analitik, numerik, dan kemudian digunakan pada WinBUGS atau R.

Akhir kata, kami selaku penulis mengharapkan dukungan kepada seluruh pihak agar buku ini dapat bermanfaat dengan baik dan dapat membantu kalangan akademisi yang tertarik menggunakan pemodelan Bayesian.

Okttober 2022

Tim Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	iii
DAFTAR ISI	v
DAFTAR TABEL	vii
DAFTAR GAMBAR	viii
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Model 2-Level.....	2
1.2 Metode Bayes.....	4
1.3 Pemilihan <i>Prior</i>	5
BAB 2 PROSES STOKASTIK.....	9
2.1 Markov Chain Monte Carlo	10
2.2 Metode Gibbs Sampler dan Metropolis-Hasting.....	12
BAB 3 MODEL BAYESIAN.....	15
3.1 Model <i>Convolution</i>	16
3.2 Review Bayesian 2 Level Spasio Temporal.....	23
3.3 Perluasan BP2L S-T	26
3.4 Model Assessment	27
3.5 Analisis Sensitifitas dan Seleksi Variabel	30

BAB 4 PROSES ANALITIK	33
4.1 Full Conditional Distribusi.....	34
4.2 Model BP2L S-T	34
4.3 Perluasan BP2L S-T	61
BAB 5 SIMULASI NUMERIK	75
5.1 Estimasi Parameter Model dengan WinBUGS	76
5.2 Perluasan MBP2L Spasio Temporal	93
BAB 6 KINERJA MODEL.....	105
6.1 Perfomance Model	106
6.2 Analisis Resiko Relatif Kasus DBD.....	108
6.3 Studi Simulasi Data	115
DAFTAR PUSTAKA	120
BIOGRAFI PENULIS	124

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Hubungan ketetanggaan antar lokasi	18
Tabel 4.1.	Distribusi <i>prior</i> dan <i>hyperprior</i> untuk BP2L S-T (Neyens, dkk., 2011; Eckert, dkk., 2007; Lawson, 2009, Gelfand dkk., 2010)	38
Tabel 4.2.	FCDs BP2L S-T.....	58
Tabel 4.3.	Koleksi distribusi <i>prior</i> dan <i>hyperprior</i> PBP2L S-T (Mukhsar, Iriawan, Ulama, Sutikno, dan Kuswanto, 2013)	63
Tabel 4.4.	FCDs PBP2L S-T	72
Tabel 5.1	Matriks hubungan ketetanggaan antar lokasi	78
Tabel 5.2.	Hasil estimasi parameter regresi MPB2L spasio temporal.....	92
Tabel 5.3.	Hasil estimasi parameter model setelah 20.000 kali iterasi.....	101
Tabel 6.1.	Nilai Bayes factor dan DIC untuk MBP2L dan perluasan MBP2L spasio temporal.....	108
Tabel 6.2.	Lokasi rawan kasus DBD di kota Surabaya.....	114
Tabel 6.3.	Simulasi nilai <i>deviance</i> BP2L S-T dan PBP2L S-T menggunakan data DBD Kota Surabaya dan data yang dibangkitkan, setiap 10000 iterasi dilakukan monitoring hasil.....	118

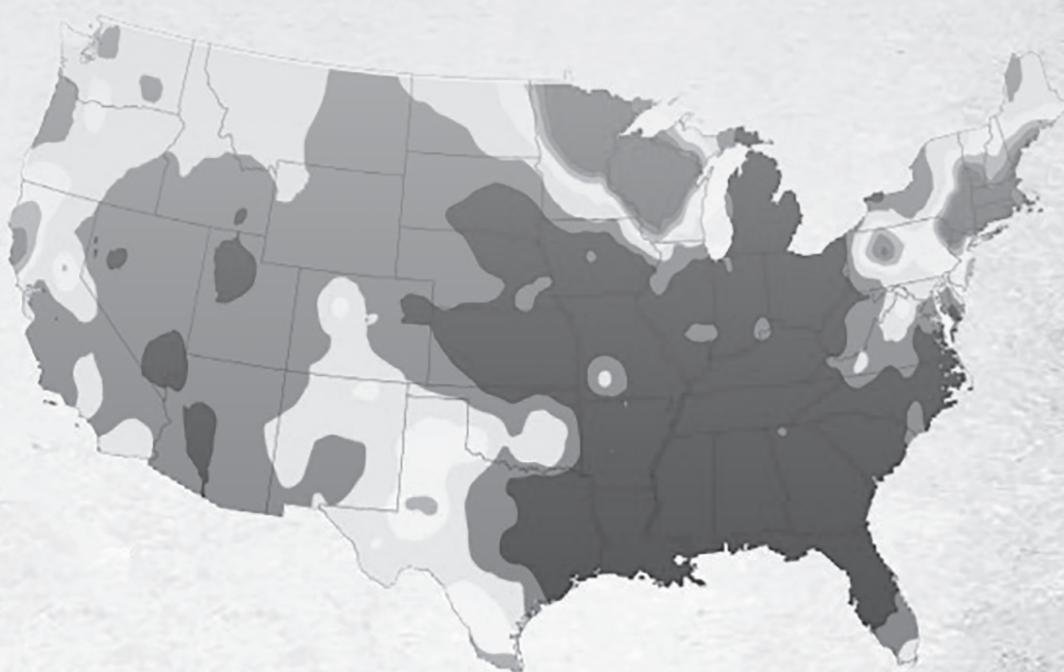
DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Skema hirarkti 2-level, γ_s jumlah kasus DBD bersarang dalam kecamatan s , dan kecamatan bersarang dalam kabupaten/kota,.....	2
Gambar 1.2.	Ilustrasi model 2-level untuk kasus epidemik	4
Gambar 3.1	Ilustrasi untuk menentukan <i>adjency</i> dari tiga lokasi	17
Gambar 3.2	Hubungan antara <i>hyperparameter</i> dengan parameter BP2L S-T dan PBP2L S-T	28
Gambar 3.3	Skema uji sensitifitas, prediktor sebagai input dalam pemodelan	31
Gambar 3.4	Skema model <i>assessment</i> dan sensitifitas.....	31
Gambar 4.1.	Prosedur untuk mendapatkan FCDs BP2L S-T dan PBP2L S-T.	35
Gambar 5.1	Nomor lokasi (atau kecamatan) kota Surabaya, penomoran ini dilakukan oleh peneliti dan dapat dilakukan penomoran versi lainnya sesuai peneliti.....	78
Gambar 5.2.	DAG MBP2L spasio temporal, <i>node</i> lingkaran sebagai stokastik atau <i>logical</i> , <i>node</i> kotak sebagai konstanta, garis tunggal menyatakan hubungan <i>stokastik</i> (distribusi), garis ganda menyatakan hubungan <i>deterministic</i> (<i>logical</i>),	83
Gambar 5.3.	<i>Flowchart</i> MBP2L spasio temporal	84

Gambar 5.4.	Makro program MBP2L spasio temporal	85
Gambar 5.5.	Histori proses iterasi, sebanyak 30.000 kali iterasi	87
Gambar 5.6.	Densitas setiap parameter regresi, diiterasi sebanyak 30.000 kali	88
Gambar 5.7.	<i>Quantile</i> setiap parameter model, diiterasi sebanyak 30.000 kali	89
Gambar 5.8	Merupakan hasil MC error menggunakan <i>window estimator</i> merupakan autocorrelation hasil simulai pada WinBUGS.	91
Gambar 5.8.	<i>Autocorrelation</i> setiap parameter model	91
Gambar 5.9.	Visulasasi MBP2L spasio temporal dibandingkan dengan data observasi	92
Gambar 5.10.	DAG perluasan MBP2L spasio temporal, <i>node</i> logical, node kotak sebagai konstanta, garis tunggal menyatakan hubungan <i>stokastik</i> (distribusi), garis ganda menyatakan hubungan <i>deterministic (logical)</i> ,	96
Gambar 5.11.	<i>Flowchart</i> perluasan MBP2L spasio temporal.....	97
Gambar 5.12.	Makro program perluasan MBP2L spasio temporal	98
Gambar 5.13.	Histori proses iterasi parameter model sebanyak 20.000 kali iterasi	99
Gambar 5.14.	Nilai-nilai parameter regresi model setelah iterasi 20.000 kali,(a) densitas, (b) <i>quantile</i>	100
Gambar 5.15.	Grafik <i>autocorrelation</i> setiap parameter model yang berkaitan dengan <i>covariate</i>	101
Gambar 5.16.	Visualisasi resiko relatif perluasan MBP2L spasio temporal dibandingkan dengan observasi.....	102
Gambar 6.1.	Perbandingan MC error antara MBP2L spasio temporal dan perluasan MBP2L spasio temporal	106

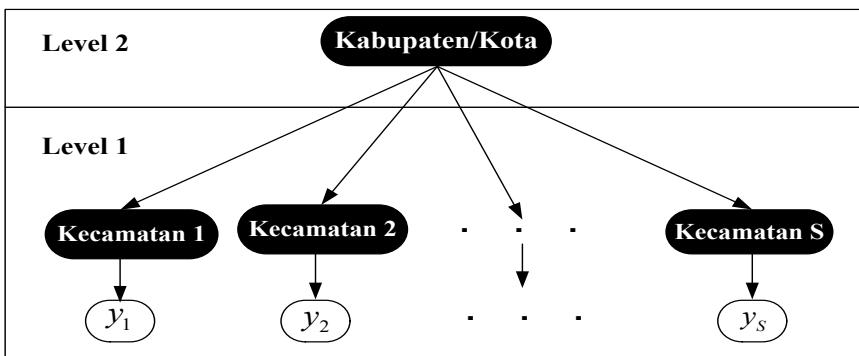
Gambar 6.2.	Kasus DBD Desember 2001, (a) Resiko relatif kasus DBD kota Surabaya v.s covariate, (b) peta resiko kasus DBD	109
Gambar 6.3.	Kasus DBD Januari 2003, (a) Resiko relatif kasus DBD kota Surabaya v.s covariate, (b) peta resiko kasus DBD	110
Gambar 6.4.	Kasus DBD Januari 2004, (a) Resiko relatif kasus DBD kota Surabaya v.s covariate, (b) peta resiko kasus DBD	110
Gambar 6.5.	Kasus DBD Januari 2005, (a) Resiko relatif kasus DBD kota Surabaya v.s covariate, (b) peta resiko kasus DBD	111
Gambar 6.6.	Kasus DBD Januari 2006, (a) Resiko relatif kasus DBD kota Surabaya v.s covariate, (b) peta resiko kasus DBD	111
Gambar 6.7.	Kasus DBD Desember 2006, (a) Resiko relatif kasus DBD kota Surabaya v.s covariate, (b) peta resiko kasus DBD	112
Gambar 6.8.	Kasus DBD Januari 2008, (a) Resiko relatif kasus DBD kota Surabaya v.s covariate, (b) peta resiko kasus DBD	112
Gambar 6.9.	Kasus DBD Januari 2009, (a) Resiko relatif kasus DBD kota Surabaya v.s covariate, (b) peta resiko kasus DBD	113
Gambar 6.10.	Kasus DBD Februari 2010, (a) Resiko relatif kasus DBD kota Surabaya v.s covariate, (b) peta resiko kasus DBD	113
Gambar 6.11.	Zona rawan kasus DBD di Kota Surabaya.....	115
Gambar 6.12.	Proses untuk membangkitkan pseudo-observasi dan sampel prediktor	117
Gambar 6.13.	Profil perubahan nilai <i>deviance</i> BP2L S-T dan PBP2L S-T, (a) menggunakan data DBD Kota Surabaya, (b) menggunakan data yang dibangkitkan	118

PENDAHULUAN



1.1 Model 2-Level

Model 2-level merupakan model regresi yang diekspresikan sebagai GLMs seperti yang diuraikan oleh Congdon (2010). Variabel respon diukur di level 1 dan variabel prediktornya dapat diukur di level 1 dan/atau dari level 2 (Ha dan Lee, 2005; Leyland dan McLeod, 2000; Goldstein, 2011). Gambar 1.1 merupakan ilustrasi model 2-level, dengan menganggap bahwa kasus DBD bersarang dalam kecamatan (level 1) dan setiap kecamatan bersarang dalam kota/kabupaten (level 2).



Gambar 1.1 Skema hirarkti 2-level, y_s jumlah kasus DBD bersarang dalam kecamatan s , dan kecamatan bersarang dalam kabupaten/kota,

Selain itu, Gambar 1.1 juga menjelaskan banyaknya kasus DBD di kecamatan s , ditulis $y_s \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$, \mathbf{Z}^+ adalah bilangan bulat positif dengan $s = 1, \dots, S$, sebagai *count* data mengikuti proses Poisson atau Binomial. Namun demikian, kasus DBD disetiap kecamatan jumlahnya cukup kecil dibandingkan jumlah penduduknya, sehingga jika data mengikuti distribusi Binomial maka dalam pemodelan dapat didekati menggunakan Poisson (Lawson, 2008; Gelfand, dkk., 2010). Oleh karena itu, pembahasan difokuskan pada proses Poisson y_s dengan mean λ_s , ditulis $y_s \sim Poisson(\lambda_s)$ dan fungsi densitasnya sebagai berikut

$$f(y_s | \lambda_s) = \frac{\lambda_s^{y_s}}{y_s!} \exp(-\lambda_s), \text{ dengan } y_s \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}, s = 1, \dots, S$$

serta fungsi likelihoodnya didefinisikan sebagai berikut

$$p(y_s | \lambda_s) = \prod_{s=1}^S \frac{\lambda_s^{y_s}}{y_s!} \exp(-\lambda_s), \text{ dengan } y_s \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}, s = 1, \dots, S.$$

Mean λ_s merupakan fungsi yang mengandung heterogenitas spasial sebagai prediktor, efek random (ψ) di kecamatan s , dan *expected count*. Karena model 2-level pada Gambar 1.1 diekspresikan sebagai GLMs, sehingga λ_s yang diperoleh dari proses poisson memiliki fungsi *link* yaitu log (McCullagh dan Nelder; 1989). Oleh karena itu, λ_s dapat dituliskan menjadi,

$$\log \lambda_s = \log e_s + (f(\mathbf{x}_{ps}, \psi)) = \log e_s + \left(\beta_0 + \sum_{p=1}^P \beta_p x_{ps} + \psi \right), s = 1, \dots, S,$$

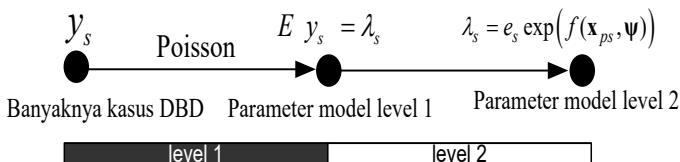
atau

$$\begin{aligned} \lambda_s &= \exp(\log e_s + (f(\mathbf{x}_{ps}, \psi))) = \exp\left(\log e_s + \left(\beta_0 + \sum_{p=1}^P \beta_p x_{ps} + \psi \right)\right), \\ &= e_s \exp\left(\beta_0 + \sum_{p=1}^P \beta_p x_{ps} + \psi\right), \\ &= e_s R R_s, s = 1, \dots, S, \end{aligned}$$

dimana x_{ps} adalah prediktor p di kecamatan s dan *expected count* (e_s) didefinisikan

$$e_s = N_s \left(\frac{\sum_{s=1}^S y_s}{\sum_{s=1}^S N_s} \right), y_s \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}, N_s \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}, s = 1, \dots, S,$$

dengan N_s dan y_s masing-masing merupakan jumlah penduduk dan jumlah kasus epidemik di kecamatan s . Fungsi $f(\mathbf{x}_{ps}, \psi)$ mengandung prediktor di kecamatan s dan efek random (ψ). Ilustrasi model 2-level tersebut, disajikan dalam Gambar 1.2.



Gambar 1.2. Ilustrasi model 2-level untuk kasus epidemik

1.2 Metode Bayes

Metode Bayes banyak digunakan untuk analisis model statistik yang tergolong kompleks. Data observasi diyakini memiliki suatu distribusi dengan parameter-parameter yang mempunyai sifat ketidakpastian. Konsep ini didasari bahwa observasi kali ini adalah observasi yang dapat dilakukan dilain waktu dan cenderung mempunyai parameter yang dijamin tidak selalu sama dengan apa yang diperoleh dari observasi-observasi mirip lainnya. Sehingga suatu parameter distribusi akan mempunyai suatu distribusi *prior* (Robert dan Casella, 2005).

Misalkan data observasi $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_S)^T$ mempunyai distribusi tertentu dengan himpunan parameter $\boldsymbol{\Theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$ yang merupakan variabel random. Dalam metode Bayes data observasi \mathbf{y} beserta distribusinya digunakan untuk membangun fungsi likelihood

$p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$. Fungsi likelihood ini memegang peranan penting untuk memperbarahui informasi *prior* $p(\boldsymbol{\theta})$ menjadi distribusi *posterior* $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$.

Misalnya distribusi *prior* untuk himpunan parameter $\boldsymbol{\theta}$, ditulis $p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\eta})$, dimana $\boldsymbol{\eta}$ merupakan vektor *hyperparameter* sebagai parameter presisi, sehingga didefinisikan distribusi *posterior* untuk himpunan parameter $\boldsymbol{\theta}$ yang dapat dituliskan sebagai berikut (Robert, 2007),

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\eta})}{\int_{\Omega_{\boldsymbol{\theta}}} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\theta}}.$$

Karena $\int_{\Omega_{\boldsymbol{\theta}}} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\theta}$ merupakan konstanta densitas, maka dapat dituliskan dalam bentuk proporsional sebagai berikut,

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) \propto p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\eta}).$$

Persamaan (1.6) menyatakan bahwa perkalian likelihood dan *prior* menghasilkan distribusi *posterior*, yang menyatakan distribusi parameter terbarukan setelah pengamatan (Carlin dan Louis, 2000).

1.3 Pemilihan *Prior*

Proses untuk mendapatkan distribusi *posterior* memerlukan informasi distribusi *prior* dan fungsi likelihood. Box dan Tiao (1973) menguraikan beberapa distribusi *prior* yang dikenal dalam Bayesian, yaitu *conjugate prior*, *nonconjugate prior*, *informative prior*, dan *noninformative prior*. Distribusi *prior* $p(\boldsymbol{\theta})$ yang memiliki parameter \mathbf{a} dan berasal dari keluarga distribusi D adalah dikatakan *conjugate* terhadap $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$, jika distribusi *posterior* $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ yang diperoleh

juga merupakan keluarga distribusi D. Sebagai ilustrasi, misalkan $y_s \sim poisson(\theta)$, $s = 1, \dots, S$, dengan fungsi likelihood

$$p(\mathbf{y}|\theta) = \prod_{s=1}^S \frac{\exp(-\theta) \times \theta^{y_s}}{y_s!} = \frac{\exp(-S\theta) \times \theta^{\sum_{s=1}^S y_s}}{\prod_{i=1}^n y_i!}.$$

Diasumsikan prior $p(\theta)$ berdistribusi gamma dengan parameter $\mathbf{a} = (a, b)^T$, atau $\theta \sim gamma(a, b)$, sehingga dapat dituliskan

$$p(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} \exp(-b\theta).$$

Diperoleh distribusi posterior $p(\theta|\mathbf{y})$, sebagai berikut

$$p(\theta|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\theta) \times p(\theta)}{\int_{\Omega_\theta} p(\mathbf{y}|\theta) \times p(\theta) d\theta} \propto p(\mathbf{y}|\theta) \times p(\theta),$$

dengan Ω_θ adalah domain θ .

Hal ini berakibat bahwa

$$\begin{aligned} p(\theta|\mathbf{y}) &\propto \frac{\exp(-S\theta) \times \theta^{\sum_{s=1}^S y_s}}{\prod_{s=1}^S y_s!} \times \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} \exp(-b\theta) \\ &\propto \exp[-\theta(S+b)] \times \frac{\theta^{\sum_{s=1}^S y_s + a - 1} b^a}{\Gamma(a)} \\ &\propto \exp[-\theta(S+b)] \times \frac{\theta^{(\sum_{s=1}^S y_s + a) - 1} b^a}{\Gamma(a)}. \end{aligned}$$

Hasil ini menunjukkan bahwa *posterior* $p(\theta|\mathbf{y})$ berdistribusi gamma, atau dapat ditulis $\theta|\mathbf{y} \sim \text{gamma}(S\bar{y} + a, S + b)$, sehingga, *prior* $p(\theta)$ bersifat *conjugate* terhadap *posterior* $p(\theta|\mathbf{y})$.

Definisi 1.1. (*Prior conjugate*) (Ntzoufras, 2009).

Misalkan *prior* $p(\theta)$ berdistribusi D dan fungsi likelihood $p(\mathbf{y}|\theta)$ distribusi F. *Prior* $p(\theta)$ dikatakan *conjugate* jika *posterior* $p(\theta|\mathbf{y})$ mengikuti distribusi D.

Pada model Bayesian, jika tidak ada informasi awal tentang parameter model, maka *noninformative prior* (atau *vague*) dapat digunakan sebagai *prior* alternatif. Terdapat beberapa distribusi *prior* yang sering digunakan untuk mengatasi masalah *noninformative prior* yaitu *flat prior* dan *prior* hirarki. *Prior* hirarki dilakukan dengan mengambil *hyperprior* dari distribusi tertentu. Untuk mendapatkan *hyperprior* yang adaptif dapat dilakukan dengan menyesuaikan (menaikkan atau menurunkan) nilai parameter distribusi *hyperprior*-nya dalam selang domainnya (Gelman, Carlin, Stern, dan Rubin, 2004; Congdon, 2003).

Nonconjugate prior merupakan *prior* yang tidak mengikuti Definisi 1.1 di atas. Bentuk *nonconjugate prior* dapat mengacu pada prior Jefry (Box dan Tiao, 1973) atau *prior* dengan distribusi uniform disepanjang domain parameternya. Untuk mendapatkan estimasi parameter model menggunakan *nonconjugate prior* membutuhkan transformasi Laplace dan intergrasi numerik (Gelman dan Hill, 2007). Dibawah ini dituliskan tiga definisi yang akan diperlukan sebagai dasar dalam proses estimasi distribusi *posterior* pada metode Bayesian.

Definisi 1.2. (*Joint posterior*) (Gelman dan Hill, 2007).

Misalkan $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ adalah suatu fungsi likelihood dan $p(\boldsymbol{\theta}) = p(\theta_1)\dots p(\theta_n)$ adalah *joint prior*, maka *joint posterior* adalah

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})p(\theta_1)\dots p(\theta_n)}{\int_{\Omega_{\theta_1}} \dots \int_{\Omega_{\theta_n}} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})p(\theta_1)\dots p(\theta_n) d\theta_1\dots d\theta_n} \propto p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})p(\theta_1)\dots p(\theta_n),$$

dengan

$$\int_{\Omega_{\theta_1}} \dots \int_{\Omega_{\theta_n}} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})p(\theta_1)\dots p(\theta_n) d\theta_1\dots d\theta_n$$

sebagai konstanta densitas dan $\Omega_{\theta_1}, \dots, \Omega_{\theta_n}$ berturut-turut sebagai domain $\theta_1, \dots, \theta_n$.

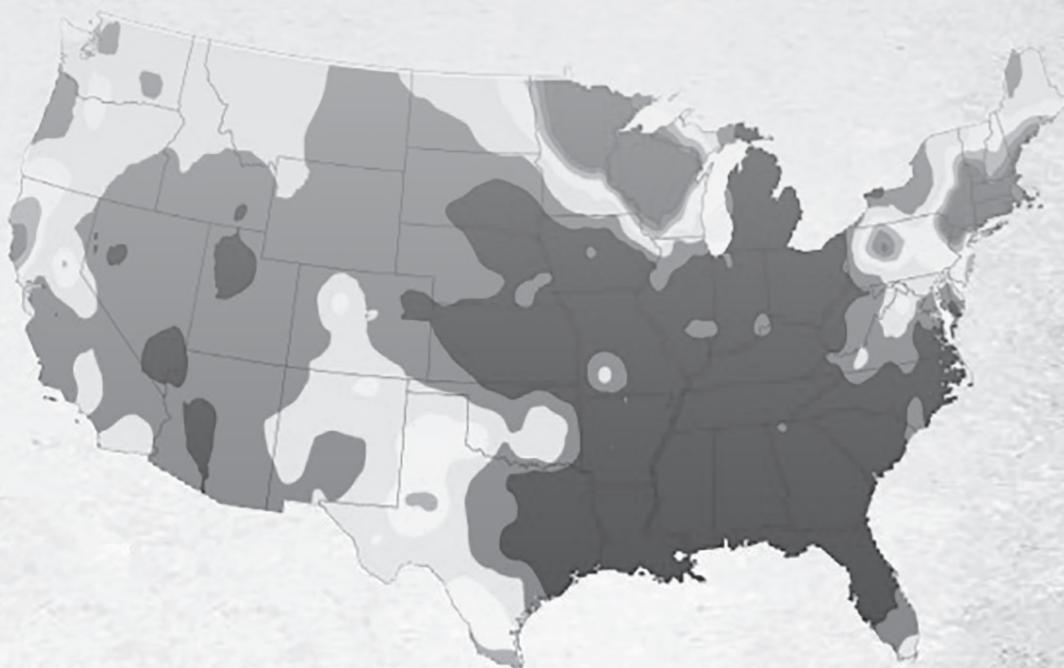
Definisi 1.3 (FCD) (Congdon, 2006).

Misalkan *joint posterior*, $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})p(\theta_1)\dots p(\theta_n)$, maka FCDs untuk $\theta_i, i=1,\dots,n$ adalah $p(\theta_i|\mathbf{y}, \theta_{-i}) \equiv [p(\theta_i|\cdot)] \propto p(\theta_i)p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$, untuk θ_{-i} adalah parameter selain θ_i yang diasumsikan konstan.

Definisi 1.4 (Closed form) (Hoff, 2009).

Misalkan *prior* $p(\boldsymbol{\theta})$ memiliki distribusi standar (distribusi yang sudah umum, misalnya normal, gamma, dan lain-lain). Jika hasil FCDs dalam Definisi 1.3 untuk $\theta_i, i=1,\dots,n$ mengikuti distribusi standar, maka FCDs bersifat *closed form*.

PROSES STOKASTIK



2.1 Markov Chain Monte Carlo

Metode Markov Chain Monte Carlo (MCMC) merupakan metode estimasi parameter model menggunakan teknik simulasi numerik yang digunakan untuk menyelesaikan masalah pemodelan yang tergolong kompleks (Ntzoufras, 2009). MCMC bekerja secara iteratif dengan membangkitkan setiap parameter model menggunakan metode Markov Chain (MC) di setiap iterasinya. Implementasi MCMC memerlukan kemampuan komputasi tingkat tinggi karena proses MCMC harus mampu merepresentasikan proses analitis yang dalam mendapatkan solusinya perlu penyelesaian integral yang berdimensi tinggi (Hoff, 2009).

MC merupakan proses iterasi sekumpulan variabel random θ , sedemikian sehingga $p(\theta^{(m+1)} | \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(m)}) = p(\theta^{(m+1)} | \theta^{(m)})$, dimana m adalah banyaknya iterasi. Dengan demikian untuk mendapatkan sampel dari suatu distribusi *posterior*, maka diperlukan struktur MC yang memiliki sifat $p(\theta^{(m+1)} | \theta^{(m)})$ dan mudah untuk dibangkitkan. Sampel parameter dalam MC diambil setelah kondisi konvergen tercapai, jika untuk $\theta^{(m)}, m \rightarrow \infty$, maka distribusi $\theta^{(m+1)}$ dan $\theta^{(m)}$ identik atau $\lim_{m \rightarrow \infty} \theta^{(m+1)} = \theta^{(m)}$.

Beberapa kondisi harus dipenuhi selama proses MC (Taylor dan Karlin, 1998; Ntzoufras, 2009), yaitu

- 1) *Irreducibility*: probabilitas untuk mengunjungi atau berubah menjadi $\theta^{(m+1)}$ dari $\theta^{(m)}$ tidak pernah nol dari iterasi m ke iterasi $m+1$, atau pergerakan $\theta^{(m)}$ selama iterasi tidak ada kecenderungan tetap pada range nilai tertentu sehingga tidak mampu berubah sesuai domain θ yang seharusnya,
- 2) *Aperiodicity*: nilai suatu θ dalam proses iterasi MC tidak mempunyai periode tertentu untuk muncul kembali dengan nilai yang sama, dan

- (3) *Recurrency*: kemunculan nilai suatu θ dalam proses iterasi MC akan muncul lagi di iterasi yang panjang berikutnya adalah suatu kepastian.

Beberapa cara mendiagnosis kekonvergenan dalam proses simulasi MCMC (Kass, Carlin, Gelman, dan Neal, 1998; Gamerman dan Lopes, 2006; Ntzoufras, 2009), antara lain adalah dengan memonitor

- 1) *Trace plot*: jika *trace plot* sudah berada di zona yang sama selama proses iterasi, maka konvergensi telah tercapai,
- 2) Evolusi *ergodic mean*: jika *ergodic mean* sudah stabil setelah sejumlah iterasi, maka proses iterasi telah mencapai konvergen.

- Algoritma proses MCMC adalah sebagai berikut (Ntzoufras, 2009)
- 1) Tentukan nilai awal $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$
 - 2) Bangkitkan sampel dengan menjalankan iterasi sebanyak M
 - 3) Amati kondisi konvergenitas data sampel. Jika kondisi konvergen belum tercapai maka diperlukan sampel lebih banyak lagi.
 - 4) Lakukan proses *burn-in* dengan membuang sebanyak M sampel pertama
 - 5) Buat plot distribusi *posterior*
 - 6) Buat ringkasan distribusi *posterior* (mean, median, standar deviasi, MC error, dan 95% interval credible).

Jika $G(\theta)$ adalah fungsi dari parameter θ , maka dari proses MCMC diperoleh sampel sebanyak m' untuk setiap parameter, sehingga barisan sampel dapat dinyatakan sebagai berikut $(G(\boldsymbol{\theta}^{(1)}), G(\boldsymbol{\theta}^{(2)}), \dots, G(\boldsymbol{\theta}^{(m+1)}), \dots, G(\boldsymbol{\theta}^{(m')}))$. Oleh karena itu, perhitungan mean *posterior* dilakukan berdasarkan persamaan

$$\overline{G(\boldsymbol{\theta})} = \frac{1}{m'} \sum_{m=1}^{m'} G(\boldsymbol{\theta}^{(m)})'$$

dan standar deviasi *posterior* dihitung melalui persamaan

$$SD(G(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})) = \sqrt{\frac{1}{m'-1} \sum_{m=1}^{m'} \left(G(\boldsymbol{\theta}^{(m)}) - \overline{G(\boldsymbol{\theta})} \right)^2}.$$

Misalkan sampel dipartisi menjadi K *batches*, dalam praktek biasanya diambil $K = 30$ (Eberley dan Carlin, 2000), dan ukuran sampel setiap *batch* adalah $v = m'/K$, sehingga MC error ditentukan dengan persamaan berikut

$$MCerror[G(\boldsymbol{\theta})] = \sqrt{\frac{1}{K(K-1)} \sum_{b=1}^K \left(\overline{G(\boldsymbol{\theta})}_b - \overline{G(\boldsymbol{\theta})} \right)^2},$$

dengan

$$\overline{G(\boldsymbol{\theta})}_b = \frac{1}{v} \sum_{m=(b-1)v+1}^{bv} G(\boldsymbol{\theta}^{(m)}), b = 1, \dots, K.$$

2.2 Metode Gibbs Sampler dan Metropolis-Hasting

Gibbs sampler adalah metode yang digunakan untuk mendapatkan estimasi parameter model dengan cara membangkitkan parameter model, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$ melalui iterasi dalam simulasi numerik. Namun demikian, untuk dapat menggunakan metode Gibbs sampler, menurut Congdon (2010); Gilks, Roberts, dan Sahu, 1998; Casella dan George (1992), dibutuhkan FCD setiap parameter model, yang bersifat *closed form* (Definisi 1.4). Proses simulasi untuk mendapatkan estimasi parameter model dengan metode Gibbs sampler, dilakukan dengan cara membangkitkan setiap parameter model yang sesuai dengan pola FCD-nya masing-masing sebanyak m kali iterasi. Prosedur Gibbs sampler disajikan dalam Algoritma 2.1.

Algoritma 2.1. Prosedur Gibbs sampler: untuk pengulangan ($m \in 1 : M$)

Step 1: Bangkitkan $\theta_1^{(m)}$ dalam $p(\theta_1 | \theta_2^{(m-1)}, \theta_3^{(m-1)}, \dots, \theta_n^{(m-1)})$,

Step 2: Bangkitkan $\theta_2^{(m)}$ dalam $p(\theta_2 | \theta_1^{(m)}, \theta_3^{(m-1)}, \dots, \theta_n^{(m-1)})$,
 \vdots

Step n: Bangkitkan $\theta_n^{(m)}$ dalam $p(\theta_n | \theta_1^{(m)}, \theta_2^{(m)}, \dots, \theta_{n-1}^{(m)})$.

Jika FCDs model tidak *closed form*, maka salah satu alternatif metode yang dapat digunakan adalah metode M-H (Congdon, 2010; Hoff, 2009; Banerjee, Carlin, dan Gelfand, 2004; Gilks dan Wild, 1992). Prosedur M-H disajikan dalam Algoritma 2.2.

Algoritma 2.2. Prosedur M-H: untuk pengulangan ($m \in 1 : M$)

Step 1: Bangkitkan kandidat nilai baru θ^* dari $p(\theta | \theta^{(m)})$,

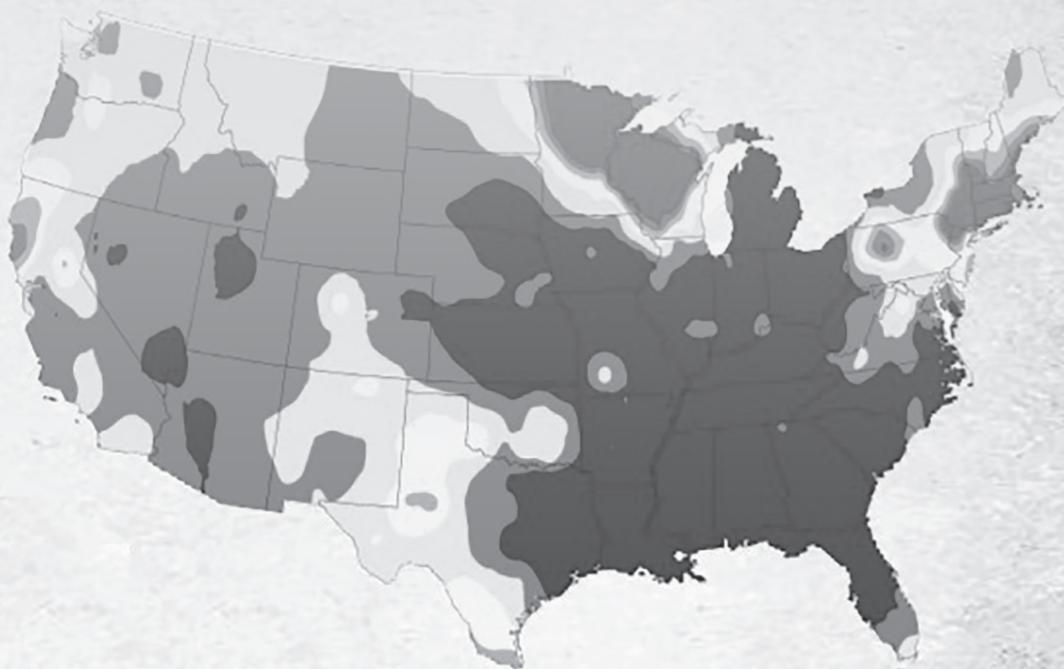
Step 2: Hitung rasio $r = \min\left(\frac{p(\theta^* | y) p(\theta^{(m)} | \theta^*)}{p(\theta^{(m)} | y) p(\theta^* | \theta^{(m)})}, 1\right)$

Step 3: Bangkitkan $\theta^{(m+1)} = \begin{cases} \theta^*, & \text{probabilitas } r \\ \theta^{(m)}, & \text{lainnya} \end{cases}$

Jika FCDs sebagian parameter model bersifat *closed form* dan sebagian parameter lainnya bersifat tidak *closed form*, maka sebagian parameter yang *closed form* tersebut dibangkitkan menggunakan MCMC Gibbs sampler berdasarkan FCD-nya dan sebagian yang tidak *closed form* dibangkitkan menggunakan M-H. Penggabungan metode estimasi ini dikenal sebagai metode Metropolis *within* Gibbs sampler (Brooks, 1999; Congdon, 2006).

Catatan:

MODEL BAYESIAN



3.1 Model *Convolution*

Model *convolution* merupakan model yang mengandung komponen heterogenitas spasial sebagai efek tetap dan dua komponen efek random. Efek randomnya terdiri atas dua bentuk yaitu efek random lokal dan efek random global (Ghosh, Natarajan, Waller, dan Kim, 1999; Li, dkk., 2002; Neyens, Faes, dan Molenberghs, 2011). Model *convolution* merupakan model yang disusun untuk data yang mengikuti proses Poisson pada kasus epidemiologi (Ainsworth dan Dean, 2005). Struktur model *convolution* didefinisikan

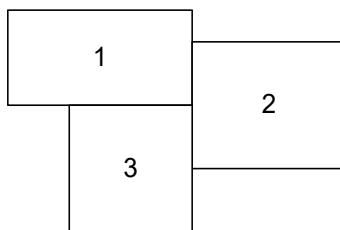
$$\begin{aligned} y_s &\sim \text{Poisson}(\lambda_s), y_s \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\} \\ \lambda_s &= e_s \exp \left(\beta_0 + \sum_{p=1}^P \beta_p x_{ps} + u_s + v_s \right), s = 1, \dots, S, p = 1, \dots, P \\ v_s | v_{j,j \neq s} &\sim N \left(\rho \sum_{j=1}^S \frac{w_{sj} v_j}{D}, \frac{1}{\tau_v D} \right), j = 1, \dots, S \\ u_s &\sim N(0, \tau_u), \end{aligned}$$

dimana P adalah banyak prediktor, τ_u adalah parameter presisi untuk u_s , u_s adalah efek random lokal, v_s adalah efek random global atau model *conditional autoregressive* (CAR), ρ adalah parameter dependensi spasial dengan nilai $-1 \leq \rho \leq 1$, D adalah total tetangga seluruh lokasi, dan τ_v adalah parameter presisi untuk v_s . Notasi w_{sj} merupakan matrix *contiguity* spasial yang disusun berdasarkan prinsip Queen yang didefinisikan sebagai berikut (Jin, Carlin, dan Banerjee, 2005),

$$w_{sj} = \begin{cases} 1, & s \text{ dan } j \text{ bertetangga (bersinggungan sisi dan sudut)} \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Diasumsikan β_0 berdistribusi *flat*, β_p berdistribusi normal dengan mean nol, dan τ_β adalah parameter presisi untuk β_p (Lawson, 2009; Gelfand, Diggle, Fuentes, dan Guttorp, 2010; Neyens, dkk., 2011).

Salah satu teknik untuk mendapatkan *prior conjugate* di atas adalah dengan cara menstandarisasi w_{sj} menjadi matriks *adjency* (Ainsworth dan Dean, 2005; Gelfand, dkk., 2010). Sebagai ilustrasi, diberikan tiga lokasi yaitu lokasi 1, lokasi 2, dan lokasi 3 yang disajikan dalam Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Ilustrasi untuk menentukan *adjency* dari tiga lokasi

Matriks *contiguity* spasial w_{sj} menurut Gambar 3.1 adalah

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

dengan standarisasi, $w_{sj} = \frac{w_{sj}}{\sum_{j=1}^3 w_{sj}}, s = j = 1, 2, 3$

sehingga diperoleh standarisasi matrix *contiguity* adalah

$$\mathbf{W}^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Standarisasi matrix *contiguity* dibentuk menjadi matriks *adjency* yang merepresentasikan hubungan ketetanggaan dari 3 lokasi tersebut, seperti yang disajikan dalam Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Hubungan ketetanggaan antar lokasi

Lokasi	Adjency (tetangga di lokasi s)	Banyaknya tetangga lokasi s $\varepsilon(s)$
1	2,3	2
2	1,3	2
3	1,2	2
Total tetangga keseluruhan lokasi (D)		6

model CAR dapat dituliskan

$$v_s | v_{j,j \neq s} \sim N\left(\rho \sum_{j \in \varepsilon(s)} \frac{v_j}{D}, \frac{1}{\tau_v D}\right),$$

dimana $\varepsilon(s)$ merupakan banyaknya tetangga lokasi s . Pembahasan model CAR terutama yang berkaitan dengan parameter dependensi ρ , diuraikan berikut.

Definisi 3.1. (Johnson dan Wichern, 2007).

$$\text{Matrik } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{S1} & \cdots & a_{SS} \end{bmatrix}_{S \times S} \quad \text{simetris, } \mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \text{ dan } \text{invertible},$$

sehingga

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \text{ jika } \det(\mathbf{A}) \neq 0.$$

Lemma 3.1. (Smith, 2010).

Diberikan matrik $\mathbf{A}_{S \times S}$ simetris dan *invertible*. Jika ada matriks

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{S1} & \cdots & b_{SS} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \text{ (atau } positive\ definite\text{) maka } \mathbf{ABA} > \mathbf{0}.$$

Bukti

Misalkan matriks $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{S1} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$, dan diketahui matrik $\mathbf{A}_{S \times S}$

invertible serta $\mathbf{B}_{S \times S} > \mathbf{0}$, sehingga menurut Definisi 1.6, diperoleh $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AC}$. Hal ini, berakibat $\mathbf{AC} \neq \mathbf{0}$. Oleh karena itu, diperoleh $(\mathbf{C}^T\mathbf{A})\mathbf{B}(\mathbf{AC}) > \mathbf{0}$. Dengan kata lain $\mathbf{C}^T(\mathbf{ABA})\mathbf{C} > \mathbf{0}$ dan karena $\mathbf{C} > \mathbf{0}$ sehingga $\mathbf{ABA} > \mathbf{0}$. ■

Teorema 3.1. (Smith, 2010).

Diberikan $\mathbf{W}_{S \times S}$ adalah matrik simetris, seluruh entrinya nonnegative, dan diagonal utama bernilai nol. Misalkan matriks

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} (w_{12} + w_{13} + \dots + w_{1S}) & \cdots & 0 \\ 0 & (w_{21} + w_{23} + \dots + w_{2S}) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \cdots (w_{s1} + w_{s2} + \dots + w_{s(s-1)}) \end{bmatrix}_{S \times S},$$

dengan $\phi_{(1)} < \phi_{(S)}$ adalah nilai eigen terurut dari $\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{WD}^{-1/2}$, sehingga nilai koefisien dependensi spasial $\rho \in \left(\frac{1}{\phi_{(1)}}, \frac{1}{\phi_{(S)}}\right)$ jika dan hanya jika $(\mathbf{D} - \rho\mathbf{W}) > \mathbf{0}$.

Bukti

Diketahui $\rho \in \left(\frac{1}{\phi_{(1)}}, \frac{1}{\phi_{(S)}} \right)$ dan didefinisikan

$$(\mathbf{D} - \rho \mathbf{W}) = \mathbf{D}^{1/2} \left(\mathbf{I} - \rho \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{W} \mathbf{D}^{-1/2} \right) \mathbf{D}^{1/2}.$$

Selanjutnya jika $\phi_{(S)} > 0$ dan $\mathbf{W}_{S \times S}$ merupakan matrik simetris dengan seluruh elemen nonnegatif kecuali diagonal utama bernilai nol, maka menurut Lemma 3.1, berakibat

$$\left(\mathbf{I} - \rho \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{W} \mathbf{D}^{-1/2} \right) > \mathbf{0} \text{ atau } (\mathbf{D} - \rho \mathbf{W}) > \mathbf{0}.$$

Di lain pihak, karena $(\mathbf{D} - \rho \mathbf{W}) > \mathbf{0}$ dan $\mathbf{W}_{S \times S}$ simetris, sehingga $\left(\mathbf{I} - \rho \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{W} \mathbf{D}^{-1/2} \right)$ juga simetris.

Sementara itu $\mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{W} \mathbf{D}^{-1/2} = \text{diag}(\phi_{(1)}, \dots, \phi_{(S)})$,

berakibat $\mathbf{I} - \rho \times \text{diag}(\phi_{(1)}, \dots, \phi_{(S)}) = \text{diag}(1 - \rho \phi_{(s)})$, $\forall s$.

Selanjutnya karena $\left(\mathbf{I} - \rho \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{W} \mathbf{D}^{-1/2} \right) > \mathbf{0}$
maka $\text{diag}(1 - \rho \phi_{(s)}) > 0$, $\forall s$.

Diketahui $\rho \in \left(\frac{1}{\phi_{(1)}}, \frac{1}{\phi_{(S)}} \right)$, sehingga jika diambil nilai ρ di luar domain, misalkan $\rho \leq \frac{1}{\phi_{(1)}}$, diperoleh $\rho \leq \frac{1}{\phi_{(1)}} < 0$ berakibat $\rho \phi_{(1)} \geq 1$ atau $1 - \rho \phi_{(1)} \leq 0$, dan misalkan $\rho \geq \frac{1}{\phi_{(S)}}$, diperoleh

$\rho \geq \frac{1}{\phi_{(S)}} > 0$ berakibat $\rho\phi_{(S)} \geq 1$ atau $1 - \rho\phi_{(S)} \leq 0$.

kontradiksi dengan $(\mathbf{I} - \rho\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{W}\mathbf{D}^{-1/2}) > \mathbf{0}$, jadi seharusnya

$$\rho \in \left(\frac{1}{\phi_{(1)}}, \frac{1}{\phi_{(S)}} \right). \blacksquare$$

Definisi 3.2. (Marin dan Robert, 2007).

Nilai dependensi spasial $\rho \in (-1, 1)$ jika $(\mathbf{D} - \rho\mathbf{W}) > \mathbf{0}$.

Teorema 3.2. (Smith, 2010).

Jika $\phi_{(S)} = 1$ dan $\phi_{(1)} \geq 1$, maka

a) nilai eigen dari $\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{W}\mathbf{D}^{-1/2}$ adalah 1

b) $-1 \leq \phi_{(1)} \leq \phi_{(S)} \leq 1$

Bukti

a) Didefinisikan vektor \mathbf{h} , dimana $h_s = \sqrt{\sum_j w_{sj}}$, sehingga

$$\mathbf{D}\mathbf{h} = \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \sum_j w_{1j} \\ \vdots \\ \sum_j w_{Sj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_j w_{1j}}{\sqrt{\sum_j w_{1j}}} \\ \vdots \\ \frac{\sum_j w_{Sj}}{\sqrt{\sum_j w_{Sj}}} \end{bmatrix} = \mathbf{h}.$$

- b) Dibuktikan secara kontradiksi. Misalkan $\phi_{(S)} > 1$, sehingga $\frac{1}{\phi_{(S)}} < 1$ dan $\rho \in \left(\frac{1}{\phi_{(S)}}, 1\right)$. Sementara itu, $(\mathbf{D} - \rho \mathbf{W}) > \mathbf{0}$, sehingga hal ini terjadi kontradiksi. Lebih lanjut, misalkan $\phi_{(1)} < -1$ dan $\rho \in \left(-1, \frac{1}{\phi_{(1)}}\right)$. ■

Teorema 3.3. (Koch, 2007).

Misalkan $f(v_1, \dots, v_S) \propto \left(-\frac{\tau_v}{2} v^T (\mathbf{D} - \rho \mathbf{W}) v \right)$ dimana \mathbf{D} dan \mathbf{W} diketahui serta $\rho \in (-1, 1)$ sehingga $(\mathbf{D} - \rho \mathbf{W}) > \mathbf{0}$. Jika ada $d_{ss} > 0$ maka τ_v dan ρ unique.

Bukti

$$\text{Misalkan } \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} m_{1(11)} & \cdots & m_{1(1S)} \\ \vdots & \ddots & \\ m_{1(s1)} & \cdots & m_{1(SS)} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

$$\text{dan } \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} m_{2(11)} & \cdots & m_{2(1S)} \\ \vdots & \ddots & \\ m_{2(s1)} & \cdots & m_{2(SS)} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

merupakan matriks dari dua distribusi yang diketahui dan $(\tau_{v_1}, \rho_1) \neq (\tau_{v_2}, \rho_2)$ berakibat $\mathbf{M}_1 \neq \mathbf{M}_2$, sehingga

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 &= \tau_{v_1} (\mathbf{D} - \rho_1 \mathbf{W}) - \tau_{v_2} (\mathbf{D} - \rho_2 \mathbf{W}) \\ &= (\tau_{v_1} - \tau_{v_2}) \mathbf{D} - (\rho_1 \tau_{v_1} - \rho_2 \tau_{v_2}) \mathbf{W}. \end{aligned}$$

Lebih lanjut, $(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)_{sj} = -(\rho_1 \tau_{v_1} - \rho_2 \tau_{v_2}) w_{sj}$, $\forall s, j, s \neq j$, dan $(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)_{ss} = -(\tau_{v_1} - \tau_{v_2}) d_{ss}$, $\forall s$. Karena $(\tau_{v_1}, \rho_1) \neq (\tau_{v_2}, \rho_2)$, sehingga untuk $\tau_{v_1} \neq \tau_{v_2}$ dan $\rho_1 = \rho_2$, berakibat $(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)_{ss} = (\tau_{v_1} - \tau_{v_2}) d_{ss} \neq 0$, sementara itu, untuk $\tau_{v_1} = \tau_{v_2}$ dan $\rho_1 \neq \rho_2$, berakibat $(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)_{sj} = -(\rho_1 \tau_{v_1} - \rho_2 \tau_{v_2}) w_{sj} = \tau_v (\rho_1 - \rho_2) w_{sj} \neq 0$. ■

3.2 Review Bayesian 2 Level Spasio Temporal

Bayesian 2 level spasio temporal (BP2L S-T) dan perluasannya (PBP2L S-T), disusun berdasarkan karakteristik kasus DBD yang berhirarki 2-level, dengan mempertimbangkan tiga komponen yaitu komponen heterogenitas spasial sebagai efek tetap, dua komponen efek random lokal dan global, dan komponen *trend* temporal. Kedua komponen efek random tersebut dapat bervariasi spasial dan juga *spatio-temporal*. Akibat adanya variasi efek random ini, maka model dibentuk mempunyai dua struktur. Model pertama mengakomodasi kedua komponen efek random masing-masing bervariasi spasial, disebut BP2L S-T, sedangkan model kedua mengakomodasi kedua komponen efek random masing-masing bervariasi *spatio-temporal*, disebut PBP2L S-T. Kedua model yang dikembangkan tergolong kompleks, sehingga estimasi parameter model dibutuhkan teknik komputasi MCMC Bayesian. Cara komputasional ini telah dikenal dapat mengatasi masalah pemodelan yang tergolong kompleks (Ntzoufras, 2009; Congdon, 2006).

Bab ini menelusuri teori yang mendasari penyusunan kedua model yang dikembangkan dan metode estimasi parameter model menggunakan MCMC Bayesian. Teori dan kajian estimasi parameter model yang dimaksudkan adalah pemodelan 2-level, teori Bayes, metode estimasi MCMC Gibbs sampler dan M-H, model *convolution*, model *assessment*, dan analisis sensitifitas. Model *assessment* digunakan untuk mendeteksi kesamaan pola antara data yang

diperoleh dari hasil pemodelan dan data observasi, serta pemilihan model. Analisis sensitifitas bermanfaat mendukung pengambilan keputusan, meningkatkan pengetahuan tentang model yang disusun, dan pengembangan model. Dalam analisis sensitifitas dilakukan beberapa skenario input dengan cara menguji signifikansi keberadaan setiap prediktor dan kombinasinya dalam model. Masing-masing alternatif input akan mengakibatkan adanya perubahan struktur model. Model BP2L S-T disusun sebagai pengembangan model *convolution*. Struktur BP2L S-T mengandung tiga komponen yaitu komponen heterogenitas spasial sebagai efek tetap, dua komponen efek random lokal dan global yang masing-masing bervariasi spasial, dan komponen *trend* temporal.

Misalkan \mathcal{Y}_{st} merupakan data banyaknya kasus epidemik yang dikumpulkan pada periode waktu $t = 1, 2, \dots, T$, di lokasi $s = 1, \dots, S$, sehingga struktur BP2L S-T berbentuk

$$y_{st} \sim \text{Poisson}(\lambda_{st}), y_{st} \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$$

$$\lambda_{st} = e_{st} \exp \left(\beta_0 + \sum_{p=1}^P \beta_p x_{pst} + u_s + v_s + (\alpha + \delta_s) t_z \right), p = 1, \dots, P$$

$$v_s | v_{j,j \neq s} \sim N \left(\rho \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} \frac{v_j}{D}, \frac{1}{\tau_v D} \right), s = 1, \dots, S, t = 1, \dots, T$$

$$u_s \sim N(0, \tau_u),$$

$$\delta_s | \delta_{j,j \neq s} \sim N \left(\rho \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} \frac{v_j}{D}, \frac{1}{\tau_\delta D} \right),$$

$$\alpha \sim N(0, \tau_\alpha),$$

dimana x_{pst} adalah prediktor p di lokasi s dan waktu t , serta $(\alpha + \delta_s) t_z$ adalah *trend* temporal, dengan t_z adalah periode waktu, misalnya data ke-1 periode waktu $t_z = 1$, data ke-2 periode waktu $t_z = 2$, data ke-13 periode waktu $t_z = 1$, dan lain-lain sesuai kebutuhan

analisis. Makna $(\alpha + \delta_s)t_z$ dalam pemodelan ini adalah setiap lokasi mempunyai intercept yang sama (α) dan setiap lokasi mempunyai kontribusi trend kasus epidemik yang berbeda-beda (δ_s). Sementara itu, e_{st} adalah *expected count*, yang didefinisikan

$$e_{st} = N_{st} \left(\frac{\sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T y_{st}}{\sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T N_{st}} \right), y_{st} \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}, N_{st} \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\},$$

dimana N_{st} dan y_{st} masing-masing adalah jumlah penduduk dan jumlah kasus epidemik pada waktu t di lokasi s . Efek random lokal (\boldsymbol{u}_s) dan global (\boldsymbol{v}_s) mengikuti asumsi model *convolution*.

Fungsi likelihood untuk BP2L S-T adalah

$$p(y_{1t}, \dots, y_{St} | \boldsymbol{\lambda}) = \prod_{t=1}^T \left(\prod_{s=1}^S \frac{\lambda_{st}^{y_{st}}}{y_{st}!} \exp(-\lambda_{st}) \right),$$

dengan

$$\boldsymbol{\lambda} = \{\beta_0, \beta_p, \alpha, u_s, v_s, \delta_s, \tau_\beta, \tau_u, \tau_v, \tau_\alpha\}.$$

Menurut Definisi 2.2, diperoleh *joint posterior* untuk BP2L S-T adalah perkalian antara fungsi likelihood dan *joint prior*

$$p(\boldsymbol{\lambda} | y_{1t}, \dots, y_{St}) \propto \prod_{t=1}^T \left(\prod_{s=1}^S \frac{\lambda_{st}^{y_{st}}}{y_{st}!} \exp(-\lambda_{st}) \right) \times p(\boldsymbol{\lambda}),$$

dengan *joint prior* adalah

$$p(\boldsymbol{\lambda}) = p(\beta_0)p(\beta_p | \tau_\beta)p(\alpha | \tau_\alpha)p(u_s | \tau_u)p(v_s | \tau_v)p(\delta_s | \tau_\delta)p(\tau_\alpha)p(\tau_u)p(\tau_v)p(\tau_\delta)p(\tau_\beta).$$

3.3 Perluasan BP2L S-T

Model PBP2L S-T merupakan pengembangan BP2L S-T, dimana memodifikasi dua komponen efek random lokal dan global, masing-masing menjadi bervariasi *spatio-temporal*. Karena struktur PBP2L S-T dikembangkan dari BP2L S-T, sehingga asumsi-asumsi yang digunakan dalam BP2L S-T juga berlaku dalam PBP2L S-T. Lebih lanjut, struktur PBP2L S-T diberikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} y_{st} &\sim \text{Poisson}(\lambda_{st}), \quad y_{st} \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}, s = 1, \dots, S, t = 1, \dots, T \\ \lambda_{st} &= e_{st} \exp \left[\left(\beta_0 + \sum_{p=1}^P \beta_p x_{pst} + u_{st} + v_{st} + (\alpha + \delta_s) t_z \right) \right], \\ v_{st} | v_{j,j \neq s} &\sim N \left(\rho \sum_{j \in \varepsilon(s)} \frac{v_j}{D}, \frac{1}{\tau_v D} \right), \\ u_{st} &\sim N(0, \tau_u), \end{aligned}$$

dimana efek random lokal (u_{st}) dan global (v_{st}) bervariasi *spatio-temporal*.

Berdasarkan Definisi 1.2, sehingga *joint posterior* untuk PBP2L S-T adalah perkalian antara fungsi likelihood dan distribusi *joint prior*,

$$p(\boldsymbol{\lambda} | y_{1t}, \dots, y_{St}) \propto \prod_{t=1}^T \left(\prod_{s=1}^S \frac{\lambda_{st}^{y_{st}}}{y_{st}!} \exp(-\lambda_{st}) \right) \times p(\boldsymbol{\lambda}),$$

dengan $\boldsymbol{\lambda} = \{\beta_0, \beta_p, \alpha, u_{st}, v_{st}, \delta_s, \tau_\alpha, \tau_u, \tau_v, \tau_\delta, \tau_\beta\}$, dan *joint prior* adalah

$$p(\boldsymbol{\lambda}) = p(\beta_0) p(\beta_p | \tau_\beta) p(\alpha | \tau_\alpha) p(u_{st} | \tau_u) p(v_{st} | \tau_v) p(\delta_s | \tau_\delta) p(\tau_\alpha) p(\tau_u) p(\tau_v) p(\tau_\delta) p(\tau_\beta).$$

Oleh karena model BP2L S-T dan PBP2L S-T tergolong kompleks karena akibat adanya variasi *spatio-temporal*, maka untuk mendapatkan estimasi parameter model dibutuhkan cara komputasional.

3.4 Model Assessment

Model *assessment* mempunyai dua fungsi yaitu deteksi pola RR hasil model dan pemilihan model. Deteksi berguna untuk mengidentifikasi kesamaan pola antara visual RR kasus DBD dari hasil model dan data observasi. Pemilihan model bermanfaat untuk memilih model terbaik, diantara model BP2L S-T dan PBP2L S-T. Model terbaik yang terpilih disebut *full model*.

Kriteria pemilihan model menggunakan DIC, yang didefinisikan sebagai berikut

$$\text{DIC}_L = 2 \overline{D(\boldsymbol{\theta}_L, L)} - D(\bar{\boldsymbol{\theta}}_L, L),$$

dengan $\bar{\boldsymbol{\theta}}_L$ merupakan *posterior mean* untuk parameter model L , dan

$D(\boldsymbol{\theta}_L, L)$ merupakan *deviance*,

$$D(\bar{\boldsymbol{\theta}}_L, L) = -2 \log p(\mathbf{y} | \bar{\boldsymbol{\theta}}_L).$$

Lawson (2009), mendefinisikan $\overline{D(\boldsymbol{\theta}_L, L)}$, dengan

$$\overline{D(\boldsymbol{\theta}_L, L)} = p_L + D(\bar{\boldsymbol{\theta}}_L, L),$$

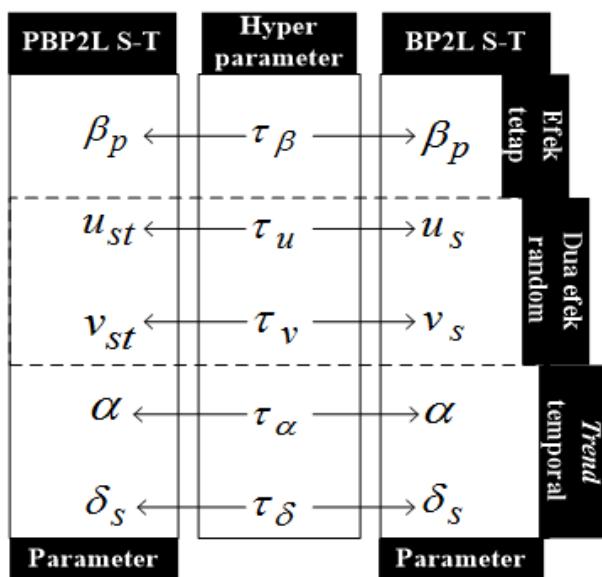
Oleh karena itu, DIC dalam (2.21), dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \text{DIC}_L &= 2 \overline{D(\boldsymbol{\theta}_L, L)} - D(\bar{\boldsymbol{\theta}}_L, L) \\ &= 2p_L + 2D(\bar{\boldsymbol{\theta}}_L, L) - D(\bar{\boldsymbol{\theta}}_L, L) \\ &= D(\bar{\boldsymbol{\theta}}_L, L) + 2p_L \\ &= -2 \log p(\mathbf{y} | \bar{\boldsymbol{\theta}}_L) + 2p_L, \end{aligned}$$

dengan $p(\mathbf{y} | \bar{\boldsymbol{\theta}}_L)$ adalah fungsi likelihood model L , $\bar{\boldsymbol{\theta}}_L$ merupakan himpunan parameter efektif yang berkorelasi dengan data, dan p_L adalah banyaknya parameter efektif model L . Secara tegas

menunjukkan pentingnya peranan *deviance* dalam menentukan kinerja model. Nilai *deviance* atau DIC terkecil merupakan model dengan kinerja terbaik (Congdon, 2006; Ntzoufras, 2009). Pernyataan ini selanjutnya dipertegas dengan menguraikan peranan *deviance* dari fungsi likelihood BP2L S-T dan PBP2L S-T.

Struktur BP2L S-T dan PBP2L S-T, dengan fungsi likelihood masing-masing memiliki tiga komponen yaitu efek tetap, dua efek random lokal dan global, dan *trend* temporal. Komponen efek tetap ini merupakan komponen yang mengakomodasi faktor heterogenitas spasial sebagai prediktor. Dua komponen efek random merepresentasikan mobilitas orang dalam domain penelitian. Masing-masing parameter yang berasal dari tiga komponen tersebut pada kedua model memiliki parameter presisi atau *hyperparameter* yang sama. Parameter presisi ini digunakan untuk mengontrol parameter kedua model. Hubungan antara parameter presisi dengan parameter BP2L S-T dan PBP2L S-T, disajikan dalam Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Hubungan antara *hyperparameter* dengan parameter BP2L S-T dan PBP2L S-T

Deviance dari bentuk likelihood BP2L S-T dan PBP2L S-T, berikut ini

$$\begin{aligned}
 D(\bar{\lambda}_L, L) &= -2 \log \left(\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S \frac{\lambda_{st}^{y_{st}}}{y_{st}!} \exp(-\lambda_{st}) \right) \\
 &= -2 \log \left(\prod_{t=1}^T \left(\frac{\lambda_{1t}^{y_{1t}}}{y_{1t}!} \exp(-\lambda_{1t}) \right) \times \dots \times \left(\frac{\lambda_{St}^{y_{St}}}{y_{St}!} \exp(-\lambda_{St}) \right) \right) \\
 &= -2 \left((-\lambda_{11} - \dots - \lambda_{1T}) - \dots - (-\lambda_{11} - \dots - \lambda_{1T}) \right) + \\
 &\quad - 2 \left(\left(\log \frac{\lambda_{11}^{y_{11}}}{y_{11}!} + \dots + \log \frac{\lambda_{1T}^{y_{1T}}}{y_{1T}!} \right) + \dots + \left(\log \frac{\lambda_{S1}^{y_{S1}}}{y_{S1}!} + \dots + \log \frac{\lambda_{ST}^{y_{ST}}}{y_{ST}!} \right) \right) \\
 &= -2 \left(-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \lambda_{st} + \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S y_{st} \log \frac{\lambda_{st}}{y_{st}!} \right) \\
 &= -2 \left(-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \lambda_{st} + \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S y_{st} - \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S y_{st} + \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S y_{st} \log \frac{\lambda_{st}}{y_{st}!} \right) \\
 &= 2 \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (\lambda_{st} - y_{st}) + 2 \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S y_{st} \left(1 - \log \frac{\lambda_{st}}{y_{st}!} \right).
 \end{aligned}$$

Sehingga *deviance* untuk BP2L S-T dan PBP2L S-T, dapat dituliskan secara sederhana sebagai berikut,

$$D(\bar{\lambda}_L, L) = 2 \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (\lambda_{st} - y_{st}) + 2 \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S y_{st} \left(1 - \log \frac{\lambda_{st}}{y_{st}!} \right).$$

Persamaan (1.24) tegas menyatakan nilai *deviance* akan semakin kecil jika hasil $(\lambda_{st} - y_{st})$ juga kecil atau model semakin mendekati kondisi riil jika $(\lambda_{st} - y_{st}) \rightarrow 0$. Oleh karena itu, model dengan *deviance* terkecil merupakan model dengan kinerja terbaik atau mendekati data observasi.

Oleh karena BP2L S-T dan PBP2L S-T masing-masing dalam penelitian menggunakan data yang sama sebagai prediktor, memiliki kuantitas p_L yang sama. Sehingga dalam menentukan kinerja kedua model tersebut hanya dibutuhkan *deviance* untuk membedakannya.

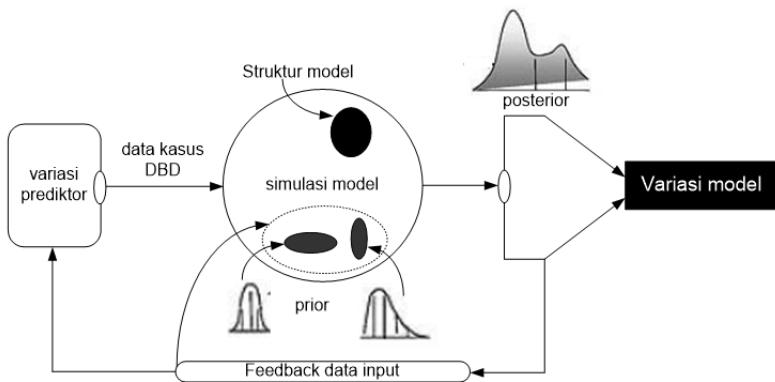
Faktor p_L akan bermanfaat jika ada seleksi variabel karena terjadi perubahan struktur model terutama pada variasi parameter β_p . Jika hal ini terjadi, maka kriteria DIC dapat dimodifikasi dan digunakan untuk menentukan kinerja sejumlah model akibat seleksi variabel pada BP2L S-T dan PBP2L S-T. Sehingga DIC untuk BP2L S-T dan PBP2L S-T dapat dirumuskan sebagai berikut

$$DIC_L = 2 \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (\lambda_{st} - y_{st}) + 2 \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S y_{st} \left(1 - \log \frac{\lambda_{st}}{y_{st}!} \right) + 2 p_L.$$

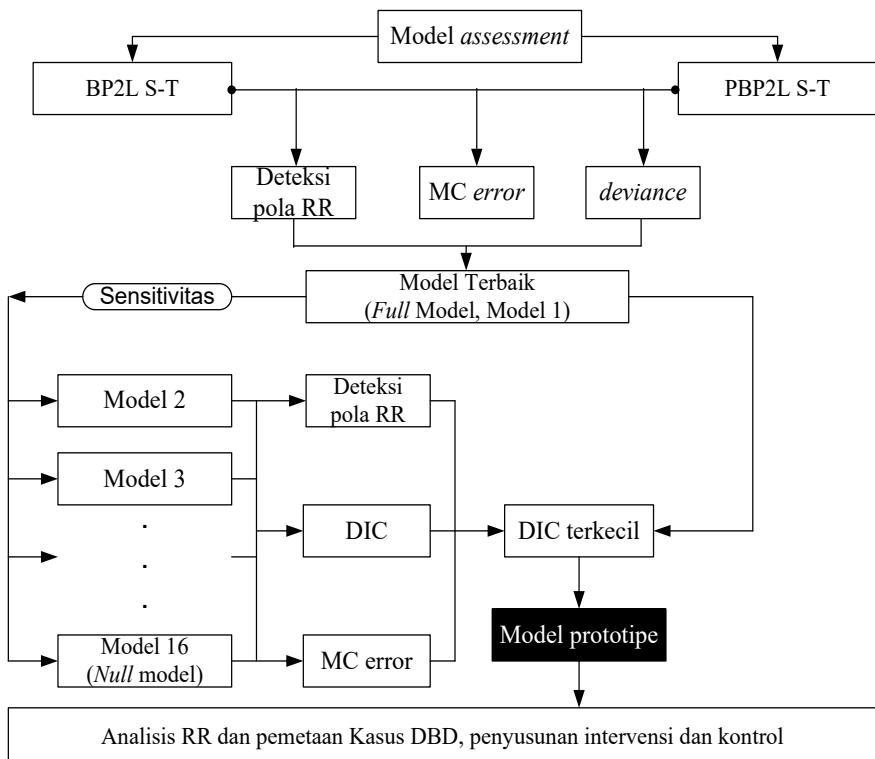
3.5 Analisis Sensitifitas dan Seleksi Variabel

Analisis sensitifitas bermanfaat untuk mendukung pengambilan keputusan, meningkatkan pengetahuan sistem yang disusun, dan pengembangan model (Geisser dan Eddy, 1979; Draper dan Kmajic, 2006). Analisis sensitifitas bertujuan untuk menguji kinerja model jika diberikan variasi pada inputnya. Skenario dalam analisis sensitifitas adalah melakukan variasi input dalam *full* model dengan cara menguji setiap prediktor dan kombinasinya, seperti yang disajikan dalam Gambar 3.3. Variasi-variasi input dalam *full* model menghasilkan sejumlah model dan memiliki struktur berbeda-beda.

Terdapat 4 prediktor yang digunakan sebagai input dalam pemodelan seperti yang telah diuraikan dalam Bab 1, maka terbentuk $2^4 = 16$ model. Enam belas model tersebut, memiliki struktur model dan algoritma komputasional yang berbeda-beda. Kriteria untuk mendapatkan model terbaik adalah menggunakan DIC, dimana DIC terkecil merupakan model yang dipilih sebagai model prototipe. Model prototipe digunakan untuk memperbaiki analisis yang diperoleh dalam *full* model. Skema pemilihan model dan seleksi variabel, selengkapnya disajikan pada Gambar 3.4.



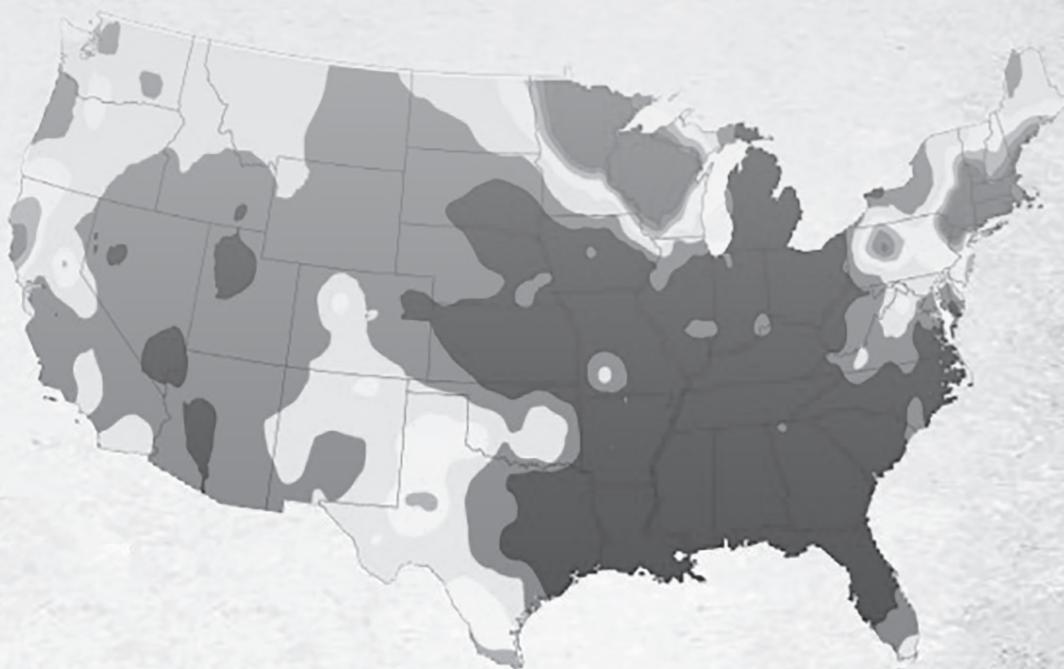
Gambar 3.3 Skema uji sensitifitas, prediktor sebagai input dalam pemodelan



Gambar 3.4 Skema model *assessment* dan sensitifitas

Catatan:

PROSES ANALITIK



4.1 Full Conditional Distribusi

Bagian ini menguraikan prosedur untuk mendapatkan FCDs BP2L S-T dan PB2L S-T, masing-masing diuraikan berdasarkan *joint posterior*. FCDs ini cukup penting diketahui dalam rangka estimasi parameter model baik dengan pendekatan metode MCMC Gibbs sampler, maupun dengan MCMC M-H. Tujuan yang ingin dicapai adalah mendapatkan FCDs BP2L S-T dan PBP2L S-T.

Jika hasil prosedur analitik dari *joint posterior* dapat membentuk FCDs model yang bersifat *closed form*, maka metode MCMC Gibbs sampler sebaiknya digunakan untuk mengestimasi parameter model secara numerik dengan membangkitkan parameter model (Banerjee, dkk., 2004; Royle dan Dorazio, 2008; Hoff, 2009; Congdon, 2010). Namun, jika FCDs model tidak *closed form*, maka metode MCMC M-H digunakan untuk membangkitkan parameter model (Banerjee, dkk., 2004; Royle dan Dorazio, 2008; Hoff, 2009; Congdon, 2010). Sifat-sifat distribusi Poisson, distribusi normal, distribusi gamma, fungsi logaritma, fungsi eksponensial, dan pendekatan Taylor digunakan untuk proses memperoleh FCDs model ini. Detail proses untuk mendapatkan FCDs BP2L S-T dan PBP2L S-T, disajikan dalam Gambar 4.1.

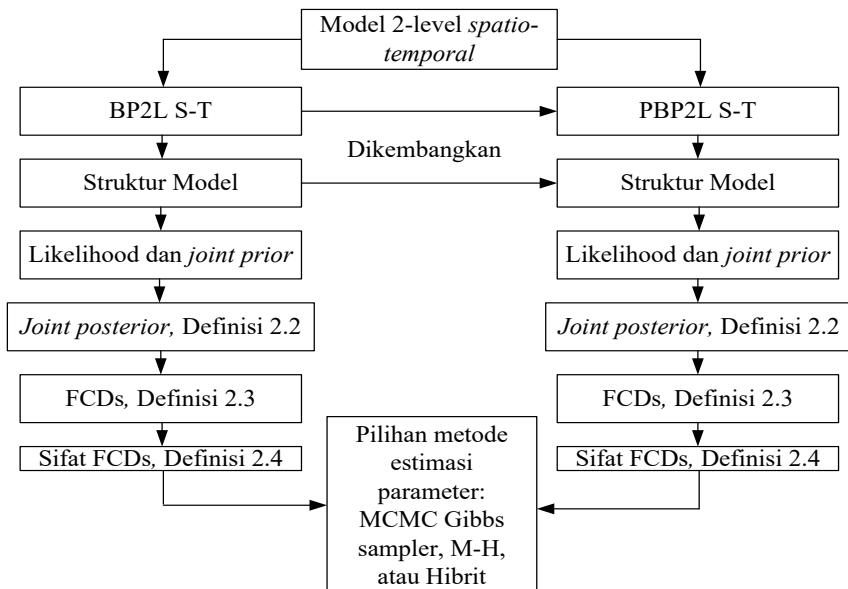
4.2 Model BP2L S-T

Tahapan BP2L S-T adalah

1. Menyusun struktur BP2L S-T, dimana kedua komponen efek random lokal dan global masing-masing bervariasi spasial,
2. Menentukan *joint prior* yang mengandung semua parameter model yang diestimasi,
3. Menyusun fungsi likelihood,
4. Menyusun *joint posterior*, merupakan perkalian antara *joint prior* (langkah 2) dan fungsi likelihood (langkah 3), mengikuti Definisi 1.2,
5. Mendapatkan FCDs berdasarkan langkah 4 dan Definisi 1.3,

6. Menentukan sifat FCDs model, berdasarkan hasil di langkah 5 yang mengikuti ketentuan dalam Definisi 1.4.

Model *convolution* merupakan model yang mengandung komponen heterogenitas spasial sebagai efek tetap dan dua komponen efek random lokal serta global. Contoh kasus, analisis RR kasus DBD di Kota Surabaya secara spasial dapat dijelaskan dengan baik menggunakan model *convolution* ini (Iriawan, dkk., 2012; Mukhsar, Iriawan, Ulama, Sutikno, dan Kuswanto, 2012). Karena model *convolution* disusun dari komponen heterogenitas spasial dan dua komponen efek random, maka model *convolution* digunakan sebagai dasar pengembangan BP2L S-T untuk menganalisis RR kasus DBD yang bervariasi *spatio-temporal* (Gambar 4.1)



Gambar 4.1. Prosedur untuk mendapatkan FCDs BP2L S-T dan PBP2L S-T.

Sebelum menerapkan model BP2L S-T pada data DBD di Kota Surabaya, terlebih dahulu ditentukan FCDs-nya untuk menentukan metode estimasi parameter yang sesuai. FCDs model BP2L S-T diperoleh berdasarkan *joint posterior* (1.18) yaitu perkalian antara fungsi likelihood dan *joint prior*. Bentuk likelihoodnya diberikan oleh

$$p(y_{1t}, \dots, y_{St} | \lambda) = \prod_{t=1}^T \left\{ \prod_{s=1}^S \frac{\left[e_{st} \exp \left(\beta_0 + \sum_{p=1}^P \beta_p x_{pst} + u_s + v_s + (\alpha + \delta_s) t_z \right) \right]^{y_{st}}}{y_{st}!} \right\} \times Z_1,$$

dengan

$$Z_1 = \exp \left[- \left(\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp \left(\beta_0 + \sum_{p=1}^P \beta_p x_{pst} + u_s + v_s + (\alpha + \delta_s) t_z \right) \right) \right],$$

$$\lambda = \{\beta_0, \beta_p, \alpha, u_s, v_s, \delta_s, \tau_\beta, \tau_u, \tau_v, \tau_\alpha\}.$$

Bentuk *joint prior* adalah

$$p(\lambda) = p(\beta_0) p(\beta_p | \tau_\beta) p(\alpha | \tau_\alpha) p(u_s | \tau_u) p(v_s | \tau_v) p(\delta_s | \tau_\delta) p(\tau_\alpha) p(\tau_u) p(\tau_v) p(\tau_\delta) p(\tau_\beta).$$

Maka *joint posterior* BP2L S-T, dapat ditulis ulang menjadi

$$p(\lambda | y_{1t}, \dots, y_{St}) \propto \prod_{t=1}^T \left\{ \prod_{s=1}^S \frac{\left[e_{st} \exp \left(\beta_0 + \sum_{p=1}^P \beta_p x_{pst} + u_s + v_s + (\alpha + \delta_s) t_z \right) \right]^{y_{st}}}{y_{st}!} \right\} \times Z_2 \times Z_3,$$

dengan

$$Z_2 = \exp \left[- \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp \left(\beta_0 + \sum_{p=1}^P \beta_p x_{pst} + u_s + v_s + (\alpha + \delta_s) t_z \right) \right]$$

$$Z_3 = p(\beta_0)p(\beta_p | \tau_\beta)p(\alpha | \tau_\alpha)p(u_s | \tau_u)p(v_s | \tau_v)p(\delta_s | \tau_\delta)p(\tau_\alpha)p(\tau_u)p(\tau_v)p(\tau_\delta)p(\tau_\beta)$$

Joint posterior dalam (3.3) digunakan untuk menguraikan FCDs BP2L S-T yang mengikuti Definisi 2.1 dan Definisi 2.2, masing-masing dimodifikasi dari Definisi 1.3 dan Definisi 1.4 yang dirancang khusus untuk model yang dikembangkan dalam penelitian disertasi ini.

Definisi 4.1. (FCD) (Mukhsar, Iriawan, Ulama, Sutikno, dan Kuswanto, 2013).

Diberikan *joint posterior*, maka FCD model, misalkan untuk β_p didefinisikan

$$\begin{aligned} p(\beta_p | y_{1t}, \dots, y_{St}, \beta_0, \beta_{-p}, \alpha, u_s, v_s, \delta_s, \tau_\beta, \tau_u, \tau_v, \tau_\alpha) &\equiv [\beta_p | \cdot] \\ &\propto p(\beta_p | \tau_\beta) p(y_{1t}, \dots, y_{St} | \lambda), \end{aligned}$$

dengan $\lambda = \{\beta_0, \beta_p, \alpha, u_s, v_s, \delta_s, \tau_\beta, \tau_u, \tau_v, \tau_\alpha\}$, dan parameter lainnya kecuali β_p (ditulis β_{-p}), dianggap konstan.

Definisi 4.2 (Closed form) (Mukhsar, dkk., 2013).

Diberikan himpunan *prior* λ , masing-masing memiliki distribusi *flat*, normal, dan gamma. FCDs untuk λ bersifat *closed form* jika menghasilkan keluarga distribusi tersebut (artinya sama dengan distribusi prior tetapi parameter yang berbeda).

Tabel 4.1. Distribusi *prior* dan *hyperprior* untuk BP2L S-T (Neyens, dkk., 2011; Eckert, dkk., 2007; Lawson, 2009, Gelfand dkk., 2010)

Nama Parameter	Distribusi prior
β_0	$\beta_0 \sim flat()$
β_p	$\beta_p \sim N(0, \tau_\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\beta}} \exp\left(-\frac{\beta_p^2}{2\tau_\beta}\right)$
u_s	$u_s \sim N(0, \tau_u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \exp\left(-\frac{u_s^2}{2\tau_u}\right)$
v_s	$v_s \sim N\left(\rho \frac{\sum_{j \in \varepsilon(s)} v_j}{D}, \frac{1}{\tau_v D}\right) = \sqrt{\frac{\tau_v D}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tau_v D}{2} \left(v_i - \frac{\sum_{j \in \varepsilon(s)} v_j}{D}\right)^2\right)$
α	$\alpha \sim N(0, \tau_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\alpha}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\tau_\alpha}\right)$
δ_s	$\delta_s \sim N\left(\rho \frac{\sum_{j \in \varepsilon(s)} \delta_j}{D}, \frac{1}{\tau_\delta D}\right) = \sqrt{\frac{\tau_\delta D}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tau_\delta D}{2} \left(\delta_s - \frac{\sum_{j \in \varepsilon(s)} \delta_j}{D}\right)^2\right)$
Distribusi hyperprior	
τ_β	$\tau_\beta \sim G(a_1, a_2) = \frac{a_2^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \tau_\beta^{a_1-1} \exp(-a_2 \tau_\beta)$
τ_u	$\tau_u \sim G(c_1, c_2) = \frac{c_2^{c_1}}{\Gamma(c_1)} \tau_u^{c_1-1} \exp(-c_2 \tau_u)$

τ_v	$\tau_v \sim G(d_1, d_2) = \frac{d_2^{d_1}}{\Gamma(d_1)} \tau_v^{d_1-1} \exp(-d_2 \tau_v)$
τ_α	$\tau_\alpha \sim G(b_1, b_2) = \frac{b_2^{b_1}}{\Gamma(b_1)} \tau_\alpha^{b_1-1} \exp(-b_2 \tau_\alpha)$
τ_δ	$\tau_\delta \sim G(e_1, e_2) = \frac{e_2^{e_1}}{\Gamma(e_1)} \tau_\delta^{e_1-1} \exp(-e_2 \tau_\delta)$

Definisi 4.2 di atas secara prinsip dikonstruksi dari Definisi 1.4, namun dalam untuk Definisi 4.2 ini disusun khusus untuk BP2L S-T dan PBP2L S-T.

Lemma 4.1.

Jika diberikan model BP2L S-T, likelihood, dan *joint prior* yang mengikuti asumsi model *convolution*, maka FCDs model BP2L S-T bersifat *closed form*.

Bukti:

Parameter yang diestimasi dalam Lemma 4.1 adalah

$$\lambda = \{\beta_0, \beta_p, \alpha, u_s, v_s, \delta_s, \tau_\alpha, \tau_u, \tau_v, \tau_\delta, \tau_\beta\}, s = 1, \dots, S,$$

sehingga masing-masing parameter tersebut, disusun FCD-nya, seperti dijabarkan dibawah ini.

FCD untuk β_0

Didefinisikan

$$p(\beta_0 | y_{1t}, \dots, y_{St}, \beta_p, \alpha, u_s, v_s, \delta_s, \tau_\alpha, \tau_u, \tau_v, \tau_\delta, \tau_\beta) \equiv [\beta_0 | .],$$

berdasarkan Definisi 3.1, parameter selain β_0 dianggap konstan, sehingga diperoleh

$$[\beta_0 | .] \propto \left(\prod_{t=1}^T \left(\prod_{s=1}^S \frac{[e_{st} \exp(\beta_0)]^{y_{st}}}{y_{st}!} \right) \right) \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(\beta_0) \right] p(\beta_0).$$

Bahwa *prior* untuk β_0 berdistribusi *flat*, sehingga menurut Congdon (2003), dapat diambil $p(\beta_0) \propto 1$ karena $p(\beta_0)$ konstan. Oleh karena itu dapat dituliskan

$$[\beta_0 | .] \propto \left(\prod_{t=1}^T \left(\prod_{s=1}^S [e_{st} \exp(\beta_0)]^{y_{st}} \right) \right) \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(\beta_0) \right].$$

Oleh karena unsur $\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S [e_{st}]^{y_{st}}$ konstan sehingga dapat

diabaikan, maka dapat dituliskan menjadi

$$[\beta_0 | .] \propto \left[\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S [\exp(\beta_0)]^{y_{st}} \right] \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(\beta_0) \right],$$

atau

$$[\beta_0 | .] \propto \left[\prod_{t=1}^T [\exp(\beta_0)]^{y_{1t}} \dots [\exp(\beta_0)]^{y_{St}} \right] \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(\beta_0) \right].$$

Secara sederhana, dapat dituliskan menjadi

$$[\beta_0 | .] \propto \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (y_{st}\beta_0 - e_{st} \exp(\beta_0)) \right].$$

Karena β_0 merupakan parameter yang diestimasi, sehingga dibutuhkan nilai awal parameter β_0 , misalnya $\beta_0^{(0)}$, agar dapat dibangkitkan menggunakan Bayesian MCMC. Oleh karena itu dapat dituliskan menjadi

$$[\beta_0 | \cdot] \propto \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \left(y_{st} \beta_0^{(0)} - e_{st} \exp(\beta_0^{(0)}) \right) \right].$$

Oleh karena $\beta_0^{(0)}$ merupakan suatu nilai awal yang konstan, y_{st} dan e_{st} juga masing-masing data observasi dan *expected count* pada lokasi s waktu t yang bernilai konstan, sehingga merupakan konstanta, sebagai berikut

$$[\beta_0 | \cdot] \propto \text{Konstanta}.$$

Berdasarkan Definisi 4.2, diperoleh FCD untuk β_0 adalah *closed form*, yaitu

$$\beta_0 \sqsupseteq \text{flat}().$$

FCD untuk β_p

Didefinisikan

$$p(\beta_p | y_{1t}, \dots, y_{St}, \beta_0, \alpha, u_s, v_s, \delta_s, \tau_\alpha, \tau_u, \tau_v, \tau_\delta, \tau_\beta) \equiv [\beta_p | \cdot],$$

menurut Definisi 4.1, bahwa parameter selain β_p dianggap konstan, sehingga diperoleh

$$[\beta_p | \cdot] \propto \prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S \left(\left[e_{st} \exp \sum_{p=1}^P \beta_p x_{pst} \right]^{y_{st}} \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp \sum_{p=1}^P \beta_p x_{pst} \right] \right) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\beta}} \exp \left(-\frac{\beta_p^2}{2\tau_\beta} \right) \right],$$

atau

$$[\beta_p | \cdot] \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\beta}} \right] \left[\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S \left[\exp \sum_{p=1}^P \beta_p x_{pst} \right]^{y_{st}} \right] \exp \left[-\frac{\beta_p^2}{2\tau_\beta} - \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp \sum_{p=1}^P \beta_p x_{pst} \right].$$

Oleh karena unsur $\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S [e_{st}]^{y_{st}}$ sehingga dapat diabaikan,

maka dapat dituliskan menjadi

$$[\beta_p |] \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\beta}} \right] \left[\prod_{t=1}^T \left(\exp \sum_{p=1}^P \beta_p x_{pt} \right)^{y_{1t}} \dots \exp \sum_{p=1}^P \beta_p x_{pt} \right] \exp \left[-\frac{\beta_p^2}{2\tau_\beta} - \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp \sum_{p=1}^P \beta_p x_{pst} \right],$$

berakibat

$$[\beta_p |] \propto \left[\exp \sum_{p=1}^P \beta_p x_{p11} \right]^{y_{11}} \dots \left[\exp \sum_{p=1}^P \beta_p x_{p1T} \right]^{y_{1T}} \dots \left[\exp \sum_{p=1}^P \beta_p x_{pS1} \right]^{y_{S1}} \dots \left[\exp \sum_{p=1}^P \beta_p x_{pST} \right]^{y_{ST}} \times Z_4,$$

dengan

$$Z_4 = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\beta}} \right] \exp \left[-\frac{\beta_p^2}{2\tau_\beta} - \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp \sum_{p=1}^P \beta_p x_{pst} \right].$$

Jika setiap suku yang bersesuaian dikumpulkan, maka

$$[\beta_p |] \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\beta}} \right] \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S y_{st} \sum_{p=1}^P \beta_p x_{pst} \right] \exp \left[-\frac{\beta_p^2}{2\tau_\beta} - \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp \left(\sum_{p=1}^P \beta_p x_{pst} \right) \right].$$

Untuk mendapatkan distribusi *posterior*, maka bagian tertentu, menggunakan pendekatan asimtotis kuadratik dengan expansi Taylor (Casella dan George, 1992; Browne dan Draper, 2006; Lawson, 2006).

Oleh karena itu, bagian $\exp \left(\sum_{p=1}^P \beta_p x_{pst} \right)$ dalam (2.9) dapat diuraikan dengan pendekatan Taylor disekitar titik $\beta_p^* = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned} g_1(\beta_p x_{pst}) &\approx \exp((\beta_p x_{pst}) = g_1(\beta_p^* x_{pst}) + (\beta_p - \beta_p^*) g_1^{(1)}(\beta_p^* x_{pst}) + \frac{(\beta_p - \beta_p^*)^2}{2} g_1^{(2)}(\beta_p^* x_{pst})) \\ &\approx \exp(0 \times x_{pst}) + (\beta_p - 0) x_{pst} + \frac{(\beta_p - 0)^2}{2} (x_{pst})^2 \end{aligned}$$

$$\approx 1 + \beta_p x_{pst} + \frac{1}{2} \beta_p^2 (x_{pst})^2.$$

Sehingga dapat dituliskan menjadi

$$[\beta_p | \cdot] \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\beta}} \right] \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \sum_{p=1}^P y_{st} \sum_{p=1}^P \beta_p x_{pst} \right] \exp \left[-\frac{\beta_p^2}{2\tau_\beta} - \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \sum_{p=1}^P \left(1 + \beta_p x_{pst} + \frac{1}{2} \beta_p^2 (x_{pst})^2 \right) \right],$$

atau

$$[\beta_p | \cdot] \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\beta}} \right] \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \left(\sum_{p=1}^P \left(\beta_p (y_{st} - e_{st} x_{pst}) - \frac{\beta_p^2}{2\tau_\beta} (1 + \tau_\beta e_{st} (x_{pst})^2) \right) \right) \right].$$

Misalkan

$$A_{11} = \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \left(y_{st} - e_{st} \sum_{p=1}^P x_{pst} \right), A_{12} = \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \left(1 + \tau_\beta e_{st} \sum_{p=1}^P (x_{pst})^2 \right),$$

berakibat, dapat ditulis

$$[\beta_p | \cdot] \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\beta}} \right] \exp \left[A_{11} \beta_p - A_{12} \frac{\beta_p^2}{2\tau_\beta} \right],$$

atau

$$[\beta_p | \cdot] \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\beta}} \right] \exp \left[-\frac{1}{2\tau_\beta} \left(-\frac{2\tau_\beta A_{11}}{A_{12}} \beta_p + \beta_p^2 \right) \right].$$

Atau dapat juga ditulis menjadi

$$[\beta_p | \cdot] \propto \left[\frac{\exp \left(-\left(\frac{2\tau_\beta A_{11}}{A_{12}} \right)^2 \right)}{\sqrt{2\pi\tau_\beta}} \right] \exp \left[-\frac{1}{2\tau_\beta} \left(-\frac{2\tau_\beta A_{11}}{A_{12}} + \beta_p \right)^2 \right].$$

Distribusi normal dan karena β_p merupakan parameter yang diestimasi, sehingga membutuhkan nilai awal untuk membangkitkannya melalui Bayesian MCMC. Oleh karena itu dapat dituliskan menjadi

$$\beta_p \sim N\left(\frac{2\tau_\beta^{(0)} A_{11}}{A_{12}}, \tau_\beta^{(0)} \exp\left(-\left(\frac{2\tau_\beta^{(0)} A_{11}}{A_{12}}\right)^2\right)\right),$$

dengan $\tau_\beta^{(0)}$ adalah nilai awal. Diperoleh FCD β_p adalah *closed form*.

FCD untuk u_s

Didefinisikan

$$p(u_s | y_{1t}, \dots, y_{St}, \beta_0, \beta_p, \alpha, v_s, \delta_s, \tau_\alpha, \tau_u, \tau_v, \tau_\delta, \tau_\beta) = [u_s | .] ,$$

menurut Definisi 2.1, bahwa parameter selain u_s dianggap konstan, sehingga diperoleh

$$[u_s | .] \propto \prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S [e_{st} \exp(u_s)]^{y_{st}} \exp\left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(u_s)\right] \prod_{s=1}^S \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \exp\left(-\frac{u_s^2}{2\tau_u}\right).$$

Unsur $\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S [e_{st}]^{y_{st}}$ pada (2.13) adalah konstan sehingga dapat

diabaikan, maka dapat dituliskan menjadi

$$[u_s | .] \propto \left(\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S [\exp(u_s)]^{y_{st}} \right) \exp\left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(u_s)\right] \prod_{s=1}^S \exp\left(-\frac{u_s^2}{2\tau_u}\right) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \right]^S.$$

Diperoleh

$$[u_s | .] \propto \exp\left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S u_s y_{st}\right] \exp\left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(u_s)\right] \exp\left(-\frac{\sum_{s=1}^S u_s^2}{2\tau_u}\right) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \right]^S.$$

Hal ini berakibat bahwa

$$[u_s | \cdot] \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \right]^S \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S u_s y_{st} - \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(u_s) - \frac{\sum_{s=1}^S u_s^2}{2\tau_u} \right].$$

Bagian $\exp(u_s)$ dapat diuraikan dengan pendekatan Taylor disekitar titik $u_s^* = 0$, sehingga

$$[u_s | \cdot] \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \right]^S \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S u_s y_{st} - \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \left(e_{st} (1 + u_s + \frac{1}{2} u_s^2) \right) - \frac{\sum_{s=1}^S u_s^2}{2\tau_u} \right],$$

atau

$$[u_s | \cdot] \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \right]^S \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (y_{st} - e_{st}) u_s - \frac{1}{2\tau_u} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (\tau_u e_{st} + 1) u_s^2 \right].$$

Misalkan

$$B_{11} = \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (y_{st} - e_{st}), \text{ dan } B_{12} = \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (\tau_u e_{st} + 1),$$

sehingga diperoleh

$$[u_s | \cdot] \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \right]^S \exp \left[B_{11} u_s - \frac{B_{12}}{2\tau_u} u_s^2 \right],$$

atau

$$[u_s | \cdot] \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \right]^S \exp \left(-\left(\frac{2\tau_u B_{11}}{B_{12}} \right)^2 \right) \exp \left[-\frac{1}{2\tau_u} \left(u_s - \frac{2\tau_u B_{11}}{B_{12}} \right)^2 \right].$$

Karena u_s merupakan efek random lokal di lokasi s dianggap sebagai parameter yang diestimasi mengikuti distribusi normal, sehingga membutuhkan nilai awal untuk membangkitkannya melalui Bayesian MCMC. Oleh karena itu, berdasarkan Diperoleh FCD untuk u_s adalah *closed form*, yaitu

$$u_s \sim N\left(\frac{2\tau_u^{(0)}B_{11}}{B_{12}}, \left(\tau_u^{(0)}\right)^S \exp\left(-\left(\frac{2\tau_u^{(0)}B_{11}}{B_{12}}\right)^2\right)\right),$$

dengan $\tau_u^{(0)}$ adalah nilai awal.

FCD untuk v_s

Didefinisikan

$$p(v_s | y_{1t}, \dots, y_{St}, \beta_0, \beta_p, \alpha, u_s, \delta_s, \tau_\alpha, \tau_u, \tau_v, \tau_\delta, \tau_\beta) = [v_s | \cdot],$$

menurut Definisi 2.1, bahwa parameter selain v_s dianggap konstan, sehingga diperoleh

$$[v_s | \cdot] \propto \prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S \left([e_{st} \exp(v_s)]^{y_{st}} \exp\left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(v_s)\right] \right) \prod_{s=1}^S \sqrt{\frac{\tau_v D}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tau_v D}{2} \left(v_s - \rho \frac{\sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j}{D} \right)^2\right).$$

Karena $\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S [e_{st}]^{y_{st}}$ adalah konstan sehingga dapat diabaikan,

maka dapat dituliskan menjadi

$$[v_s | \cdot] \propto \left[[\exp(v_1)]^{y_{1t}} \dots [\exp(v_1)]^{y_{1T}} \dots [\exp(v_S)]^{y_{S1}} \dots [\exp(v_S)]^{y_{ST}} \right] \exp\left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(v_s)\right] \times Z_5,$$

dengan

$$Z_5 = \prod_{s=1}^S \sqrt{\frac{\tau_v D}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tau_v D}{2} \left(v_i - \rho \frac{\sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j}{D} \right)^2\right)$$

atau

$$[v_s | \cdot] \propto \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S v_s y_{st} \right] \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(v_s) \right] \left[\sqrt{\frac{\tau_v D}{2\pi}} \right]^S \exp \left(-\sum_{s=1}^S \frac{\tau_v D}{2} \left(v_s - \rho \frac{\sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j}{D} \right)^2 \right).$$

Dengan kata lain dapat ditulis

$$[v_s | \cdot] \propto \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S v_s y_{st} - \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(v_s) - \frac{\tau_v}{2} \sum_{s=1}^S D v_s^2 + \rho \tau_v \sum_{s=1}^S v_s \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j - \frac{\rho^2 \tau_v \left(\sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j \right)^2}{2D} \right] \times Z_6,$$

dengan $Z_6 = \left[\sqrt{\frac{\tau_v D}{2\pi}} \right]^S$.

Bagian $\exp(v_s)$ diuraikan menggunakan pendekatan Taylor disekitar titik $v_s^* = 0$, sehingga diperoleh

$$[v_s | \cdot] \propto \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S v_s y_{st} - \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} (1 + v_s + \frac{1}{2} v_s^2) - \frac{\tau_v}{2} \sum_{s=1}^S D v_s^2 + \rho \tau_v \sum_{s=1}^S v_s \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j \right] \left[\sqrt{\frac{\tau_v D}{2\pi}} \right]^S,$$

atau

$$[v_s | \cdot] \propto \left[\sqrt{\frac{\tau_v D}{2\pi}} \right]^S \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \left(y_{st} - e_{st} + \rho \tau_v \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j \right) v_s - \frac{1}{2\tau_v} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (\tau_v e_{st} - \tau_v^2 D) v_s^2 \right].$$

Misalkan

$$C_{11} = \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \left(y_{st} - e_{st} + \rho \tau_v \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j \right), \text{ dan } C_{12} = \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (\tau_v e_{st} - \tau_v^2 D),$$

sehingga dapat diekspresikan

$$[v_s | \cdot] \propto \exp \left[C_{11} v_s - \frac{1}{2\tau_v} C_{12} v_s^2 \right] \left[\sqrt{\frac{\tau_v D}{2\pi}} \right]^S,$$

atau

$$[v_s | \cdot] \propto \exp\left[-\frac{1}{2\tau_v}\left(\frac{-2\tau_v C_{11}}{C_{12}} v_s + v_s^2\right)\right] \left[\sqrt{\frac{\tau_v D}{2\pi}}\right]^S.$$

Hal ini berakibat bahwa

$$[v_s | \cdot] \propto \exp\left(-\frac{2\tau_v C_{11}}{C_{12}}\right)^2 \exp\left[-\frac{1}{2\tau_v}\left(\frac{2\tau_v C_{11}}{C_{12}} - v_s\right)^2 \left[\sqrt{\frac{\tau_v D}{2\pi}}\right]^S\right].$$

Karena v_s merupakan efek random global di lokasi s dianggap sebagai parameter yang diestimasi mengikuti distribusi normal, sehingga membutuhkan nilai awal untuk membangkitkannya melalui Bayesian MCMC. Berdasarkan Definisi 2.2, diperoleh FCD untuk v_s adalah *closed form*, yaitu

$$v_s \sim N\left(\frac{2\tau_v^{(0)} C_{11}}{C_{12}}, \left(\tau_v^{(0)} D\right)^{-\frac{S}{2}} \exp\left(-\frac{2\tau_v^{(0)} C_{11}}{C_{12}}\right)^2\right),$$

dengan $\tau_v^{(0)}$ adalah nilai awal.

FCD untuk α

Didefinisikan

$$p(\alpha | y_{1t}, \dots, y_{St}, \beta_0, \beta_p, u_s, v_s, \delta_s, \tau_\alpha, \tau_u, \tau_v, \tau_\delta, \tau_\beta) \equiv [\alpha | \cdot],$$

menurut Definisi 2.1, bahwa parameter selain α dianggap konstan, sehingga diperoleh

$$[\alpha | \cdot] \propto \left(\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S [e_{st} \exp(\alpha)]^{y_{st}} \exp\left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(\alpha)\right] \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\alpha}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\tau_\alpha}\right).$$

Karena $\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S [e_{st}]^{y_{st}}$ adalah konstan sehingga dapat diabaikan, maka dituliskan menjadi

$$[\alpha | .] \propto \left[\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S [\exp(\alpha)]^{y_{st}} \right] \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(\alpha) \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\alpha}} \exp \left(-\frac{\alpha^2}{2\tau_\alpha} \right),$$

atau

$$[\alpha | .] \propto \left[\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S [\exp(\alpha)]^{y_{st}} \right] \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(\alpha) \right] \exp \left(-\frac{\alpha^2}{2\tau_\alpha} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\alpha}}.$$

maka diperoleh

$$[\alpha | .] \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\alpha}} \left[[\exp(\alpha)]^{y_{11}} \dots \exp(\alpha)]^{y_{1T}} \dots \exp(\alpha)]^{y_{S1}} \dots \exp(\alpha)]^{y_{ST}} \right] \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(\alpha) \right] \exp \left(-\frac{\alpha^2}{2\tau_\alpha} \right),$$

atau

$$[\alpha | .] \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\alpha}} \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \alpha y_{st} \right] \exp \left[-\frac{\alpha^2}{2\tau_\alpha} - \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(\alpha) \right].$$

Bagian $\exp(\alpha)$ diuraikan dengan pendekatan Taylor disekitar titik $\alpha^* = 0$, diperoleh,

$$[\alpha | .] \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\alpha}} \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \alpha y_{st} \right] \exp \left[-\frac{\alpha^2}{2\tau_\alpha} - \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \left(1 + \alpha + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) \right],$$

atau

$$[\alpha | .] \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\alpha}} \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (y_{st} - e_{st}) \alpha - \frac{1}{2\tau_\alpha} \left(\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (e_{st}\tau_\alpha + 1) \alpha^2 \right) \right].$$

Misalkan

$$F_{11} = \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (y_{st} - e_{st}), \text{ dan } F_{12} = \left(\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (e_{st}\tau_\alpha + 1) \right),$$

sehingga diperoleh

$$[\alpha | \cdot] \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\alpha}} \exp \left[F_{11}\alpha - \frac{1}{2\tau_\alpha} F_{12}\alpha^2 \right],$$

atau

$$[\alpha | \cdot] \propto \frac{\exp \left(-\frac{2\tau_\alpha F_{11}}{F_{12}} \right)^2}{\sqrt{2\pi\tau_\alpha}} \exp \left[-\frac{1}{2\tau_\alpha} \left(\frac{2\tau_\alpha F_{11}}{F_{12}} - \alpha \right)^2 \right].$$

Karena α merupakan salah satu unsur dari *trend* temporal dianggap sebagai parameter yang diestimasi mengikuti distribusi normal, sehingga membutuhkan nilai awal untuk membangkitkannya melalui Bayesian MCMC. Berdasarkan Definisi 2.2, diperoleh FCD untuk α adalah *closed form*, yaitu

$$\alpha \square N \left(\frac{2\tau_\alpha^{(0)} F_{11}}{F_{12}}, \tau_\alpha^{(0)} \exp \left(-\frac{2\tau_\alpha^{(0)} F_{11}}{F_{12}} \right)^2 \right),$$

dengan $\tau_\alpha^{(0)}$ adalah nilai awal.

FCD untuk δ_s

Didefinisikan

$$p(\delta_s | y_{1t}, \dots, y_{St}, \beta_0, \beta_p, u_s, v_s, \alpha, \tau_\alpha, \tau_u, \tau_v, \tau_\delta, \tau_\beta) \equiv [\delta_s | \cdot],$$

menurut Definisi 2.1, bahwa parameter selain δ_s dianggap konstan, sehingga diperoleh

$$[\delta_s | \cdot] \propto \left(\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S [e_{st} \exp(\delta_s)]^{y_{st}} \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(\delta_s) \right] \right) \prod_{s=1}^S \sqrt{\frac{\tau_\delta D}{2\pi}} \exp \left(-\frac{\tau_\delta D}{2} \left(\delta_s - \rho \frac{\sum_{j \in \mathcal{E}(s)} \delta_j}{D} \right)^2 \right),$$

karena $\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S [e_{st}]^{y_{st}}$ adalah konstan sehingga dapat diabaikan,

maka dituliskan menjadi

$$[\delta_s | \cdot] \propto \left(\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S [\exp(\delta_s)]^{y_{st}} \right) \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(\delta_s) \right] \prod_{s=1}^S \exp \left(-\frac{\tau_\delta D}{2} \left(\delta_s - \rho \frac{\sum_{j \in \mathcal{E}(s)} \delta_j}{D} \right)^2 \right) \times Z_7,$$

dengan

$$Z_7 = \left[\frac{\tau_\delta D}{2\pi} \right]^{\frac{S}{2}}.$$

maka diperoleh

$$[\delta_s | \cdot] \propto \left[[\exp(\delta_1)]^{y_{1t}} \dots [\exp(\delta_1)]^{y_{1T}} \dots [\exp(\delta_S)]^{y_{S1}} \dots [\exp(\delta_S)]^{y_{ST}} \right] \times Z_8,$$

dengan

$$Z_8 = \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(\delta_s) \right] \prod_{s=1}^S \exp \left(-\frac{\tau_\delta D}{2} \left(\delta_s - \rho \frac{\sum_{j \in \mathcal{E}(s)} \delta_j}{D} \right)^2 \right) \left[\frac{\tau_\delta D}{2\pi} \right]^{\frac{S}{2}},$$

atau dapat ditulis menjadi

$$[\delta_s | \cdot] \propto \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \delta_s y_{st} \right] \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(\delta_s) \right] \exp \left(-\sum_{s=1}^S \frac{\tau_\delta D}{2} \left(\delta_s - \rho \frac{\sum_{j \in \mathcal{E}(s)} \delta_j}{D} \right)^2 \right) \left[\frac{\tau_\delta D}{2\pi} \right]^{\frac{S}{2}}.$$

Bagian $\exp(\delta_s)$ didekati menggunakan pendekatan Taylor disekitar titik $\delta_s^* = 0$, sehingga diperoleh

$$[\delta_s | \cdot] \propto \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \delta_s y_{st} \right] \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \left(1 + \delta_s + \frac{1}{2} \delta_s^2 \right) \right] \exp \left(-\sum_{s=1}^S \frac{\tau_\delta D}{2} \left(\delta_s - \rho \frac{\sum_{j \in \mathcal{E}(s)} \delta_j}{D} \right)^2 \right) \left[\frac{\tau_\delta D}{2\pi} \right]^{\frac{S}{2}},$$

atau

$$[\delta_s | \cdot] \propto \left[\frac{\tau_\delta D}{2\pi} \right]^{\frac{S}{2}} \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \left(y_{st} - e_{st} + \tau_\delta \rho \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} \delta_j \right) \delta_s - \frac{1}{2\tau_\delta} (\tau_\delta e_{st} - \tau_\delta^2 D) \delta_s^2 \right] \exp \left[\frac{\sqrt{\tau_\delta} \rho \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} \delta_j}{\sqrt{2D}} \right]^2.$$

Misalkan

$$G_{11} = \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \left(y_{st} - e_{st} + \tau_\delta \rho \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} \delta_j \right), \text{ dan}$$

$$G_{12} = \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (\tau_\delta e_{st} - \tau_\delta^2 D),$$

Sehingga dapat ditulis menjadi

$$[\delta_s | \cdot] \propto \left[\frac{\tau_\delta D}{2\pi} \right]^{\frac{S}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\tau_\delta} \left(-\frac{2\tau_\delta G_{11}}{G_{12}} \delta_s + \delta_s^2 \right) \right] \exp \left[\left(\frac{\sqrt{\tau_\delta} \rho \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} \delta_j}{\sqrt{2D}} \right)^2 - \left(\frac{2\tau_\delta G_{11}}{G_{12}} \right)^2 \right].$$

atau

$$[\delta_s | \cdot] \propto \left[\frac{\tau_\delta D}{2\pi} \right]^{\frac{S}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\tau_\delta} \left(\frac{2\tau_\delta G_{11}}{G_{12}} - \delta_s \right)^2 \right] \exp \left[\left(\frac{\sqrt{\tau_\delta} \rho \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} \delta_j}{\sqrt{2D}} \right)^2 - \left(\frac{2\tau_\delta G_{11}}{G_{12}} \right)^2 \right].$$

Karena δ_s merupakan salah satu unsur dari *trend* temporal di lokasi s dianggap sebagai parameter yang diestimasi dan mengikuti distribusi normal, sehingga membutuhkan nilai awal untuk membangkitkannya melalui Bayesian MCMC. Berdasarkan Definisi 2.2, diperoleh FCD untuk δ_s adalah *closed form*, yaitu

$$\delta_s \sim N \left(\frac{2\tau_\delta^{(0)} G_{11}}{G_{12}}, \left[\frac{1}{\tau_\delta^{(0)} D} \right]^{-\frac{S}{2}} \exp \left[\left(\frac{\sqrt{\tau_\delta^{(0)}} \rho \sum_{j \in \varepsilon(s)} \delta_j}{\sqrt{2D}} \right)^2 - \left(\frac{2\tau_\delta^{(0)} G_{11}}{G_{12}} \right)^2 \right] \right),$$

dengan $\tau_\delta^{(0)}$ adalah nilai awal.

FCD untuk τ_β

Didefinisikan

$$p(\tau_\beta | y_{1t}, \dots, y_{St}, \beta_0, \beta_p, u_s, v_s, \alpha, \delta_s, \tau_\alpha, \tau_u, \tau_v, \tau_\delta) = [\tau_\beta | \cdot],$$

menurut Definisi 2.1, bahwa parameter lain selain τ_β dianggap konstan, sehingga diperoleh

$$[\tau_\beta | \cdot] \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\beta}} \right] \exp \left[-\frac{\beta_p^2}{2\tau_\beta} \right] \left[\frac{a_2^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \tau_\beta^{a_1-1} \exp(-a_2\tau_\beta) \right],$$

atau

$$[\tau_\beta | \cdot] \propto \left[\frac{a_2^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \right] \left[\frac{\tau_\beta^{a_1-1}}{\sqrt{2\pi\tau_\beta}} \right] \exp \left[-\frac{\beta_p^2}{2\tau_\beta} - a_2\tau_\beta \right].$$

Dengan kata lain dapat ditulis

$$[\tau_\beta | \cdot] \propto \left[\frac{a_2^{a_1}}{\sqrt{2\pi\Gamma(a_1)}} \right] \left[\tau_\beta^{\left(a_1 - \frac{1}{2}\right) - 1} \right] \exp \left[-\left(a_2 + \frac{\beta_p^2}{2\tau_\beta^2} \right) \tau_\beta \right].$$

Karena τ_β merupakan *hyperparameter* sebagai parameter presisi untuk β_p yang diestimasi dan mengikuti distribusi gamma, sehingga membutuhkan nilai awal untuk membangkitkannya melalui Bayesian

MCMC. Berdasarkan Definisi 2.2, diperoleh FCD untuk τ_β adalah *closed form*, yaitu

$$\tau_\beta \sim G\left(a_1 - \frac{1}{2}, a_2 + \frac{\left(\beta_p^{(0)}\right)^2}{2\left(\tau_\beta^{(0)}\right)^2}\right),$$

dengan $\beta_p^{(0)}$ dan $\tau_\beta^{(0)}$ adalah nilai awal.

FCD untuk τ_u

Didefinisikan

$$p(\tau_u | y_{1t}, \dots, y_{St}, \beta_0, \beta_p, u_s, v_s, \alpha, \delta_s, \tau_\beta, \tau_\alpha, \tau_v, \tau_\delta) = [\tau_u | \cdot],$$

menurut Definisi 2.1, bahwa parameter selain τ_u dianggap konstan, sehingga diperoleh

$$[\tau_u | \cdot] \propto \prod_{s=1}^S \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \exp\left(-\frac{u_s^2}{2\tau_u}\right) \right) \frac{c_2^{c_1}}{\Gamma(c_1)} \tau_u^{c_1-1} \exp(-c_2\tau_u),$$

atau dapat ditulis

$$[\tau_u | \cdot] \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \right]^S \exp\left(-\frac{\sum_{s=1}^S u_s^2}{2\tau_u} \right) \left[\frac{c_2^{c_1}}{\Gamma(c_1)} \right] \tau_u^{c_1-1} \exp(-c_2\tau_u).$$

Jika diuraikan, maka diperoleh

$$[\tau_u | \cdot] \propto \left[\frac{c_2^{c_1}}{\Gamma(c_1)} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right]^S \tau_u^{\left(c_1 - \frac{S}{2}\right) - 1} \exp\left(-\left(\frac{\sum_{s=1}^S u_s^2}{2\tau_u^2} + c_2 \right) \tau_u \right).$$

Karena τ_u merupakan *hyperparameter* sebagai parameter presisi untuk random lokal u_s yang diestimasi dan mengikuti distribusi

gamma, sehingga membutuhkan nilai awal untuk membangkitkannya melalui Bayesian MCMC. Berdasarkan Definisi 2.2, diperoleh FCD untuk τ_u adalah *closed form*, yaitu

$$\tau_u \sim G \left(c_1 - \frac{S}{2}, \frac{\sum_{s=1}^S (u_s^{(0)})^2}{2(\tau_u^{(0)})^2} + c_2 \right),$$

dengan $u_s^{(0)}$ dan $\tau_u^{(0)}$ adalah nilai awal.

FCD untuk τ_v

Didefinisikan

$$p(\tau_v | y_{1t}, \dots, y_{St}, \beta_0, \beta_p, u_s, v_s, \alpha, \delta_s, \tau_\beta, \tau_\alpha, \tau_u, \tau_\delta) \equiv [\tau_v | .],$$

menurut Definisi 2.1, bahwa parameter selain τ_v dianggap konstan, sehingga diperoleh

$$[\tau_v | .] \propto \prod_{s=1}^S \sqrt{\frac{\tau_v D}{2\pi}} \exp \left(-\frac{\tau_v D}{2} \left(v_s - \rho \frac{\sum_{j \in \varepsilon(s)} v_j}{D} \right)^2 \right) \left[\frac{d_2^{d_1}}{\Gamma(d_1)} \tau_v^{d_1-1} \exp(-d_2 \tau_v) \right].$$

Jika diuraikan, maka diperoleh

$$[\tau_v | .] \propto \left[\frac{d_2^{d_1}}{\Gamma(d_1)} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right]^S [\tau_v]^{(d_1 + \frac{S}{2})-1} \exp \left(-\frac{\tau_v}{2} \sum_{s=1}^S D v_s^2 + \rho \tau_v \sum_{s=1}^S v_s \sum_{j \in \varepsilon(s)} v_j - \frac{\rho^2 \tau_v \left(\sum_{j \in \varepsilon(s)} v_j \right)^2}{2D} - d_2 \tau_v \right).$$

Dengan kata lain dapat dituliskan

$$[\tau_v | \cdot] \propto \left[\frac{d_2^{d_1}}{\Gamma(d_1)} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right]^S [\tau_v]^{(d_1 + \frac{S}{2}) - 1} \exp \left(- \left[d_2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^S D v_s^2 - \rho \sum_{s=1}^S v_s \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j + \frac{\rho^2 \left(\sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j \right)^2}{2D} \right] \tau_v \right).$$

Karena τ_v merupakan *hyperparameter* sebagai parameter presisi untuk random global v_s yang diestimasi dan mengikuti distribusi gamma, sehingga membutuhkan nilai awal untuk membangkitkannya melalui Bayesian MCMC. Berdasarkan Definisi 2.2, diperoleh FCD untuk τ_v adalah *closed form*, yaitu

$$\tau_v \sim G \left(d_1 + \frac{S}{2}, d_2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^S D (v_s^{(0)})^2 - \rho \sum_{s=1}^S v_s^{(0)} \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j + \frac{\rho^2 \left(\sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j \right)^2}{2D} \right),$$

dengan $v_s^{(0)}$ adalah nilai awal.

FCD untuk τ_α

Didefinisikan

$$p(\tau_\alpha | y_{1t}, \dots, y_{St}, \beta_0, \beta_p, u_s, v_s, \alpha, \delta_s, \tau_\beta, \tau_u, \tau_v, \tau_\delta) \equiv [\tau_\alpha | \cdot],$$

menurut Definisi 2.1, bahwa parameter selain τ_α dianggap konstan, sehingga diperoleh

$$[\tau_\alpha | \cdot] \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\alpha}} \exp \left(-\frac{\alpha^2}{2\tau_\alpha} \right) \frac{b_2^{b_1}}{\Gamma(b_1)} \tau_\alpha^{b_1 - 1} \exp(-b_2\tau_\alpha),$$

atau dapat dituliskan menjadi

$$[\tau_\alpha | \cdot] \propto \left[\frac{b_2^{b_1}}{\Gamma(b_1)} \right] \frac{\tau_\alpha^{\left(b_1 - \frac{1}{2} \right) - 1}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(- \left(\frac{\alpha^2}{2\tau_\alpha^2} + b_2 \right) \tau_\alpha \right).$$

Karena τ_α merupakan *hyperparameter* sebagai parameter presisi untuk salah satu komponen *trend* temporal α yang diestimasi dan mengikuti distribusi gamma, sehingga membutuhkan nilai awal untuk membangkitkannya melalui Bayesian MCMC. Berdasarkan Definisi 2.2, diperoleh FCD untuk τ_α adalah *closed form*, yaitu

$$\tau_\alpha \sim G\left(b_1 - \frac{1}{2}, b_2 + \frac{(\alpha^{(0)})^2}{2(\tau_\alpha^{(0)})^2}\right),$$

dengan $\alpha^{(0)}$ dan $\tau_\alpha^{(0)}$ adalah nilai awal.

FCD untuk τ_δ

Didefinisikan

$$p(\tau_\delta | y_{1t}, \dots, y_{St}, \beta_0, \beta_p, u_s, v_s, \alpha, \delta_s, \tau_\beta, \tau_u, \tau_v, \tau_\alpha) = [\tau_\delta | \cdot],$$

menurut Definisi 2.1, bahwa parameter selain τ_δ dianggap konstan, sehingga diperoleh

$$[\tau_\delta | \cdot] \propto \prod_{s=1}^S \sqrt{\frac{\tau_\delta D}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tau_\delta D}{2} \left(\sum_{j \in \varepsilon(s)} \delta_j \right)^2\right) \left[\frac{e_2^{e_1}}{\Gamma(e_1)} \tau_v^{e_1-1} \exp(-e_2 \tau_v) \right],$$

atau dapat ditulis menjadi

$$[\tau_\delta | \cdot] \propto \left[\frac{\tau_\delta D}{2\pi} \right]^{\frac{S}{2}} \prod_{s=1}^S \exp\left(-\frac{\tau_\delta D}{2} \left(v_s - \rho \frac{\sum_{j \in \varepsilon(s)} \delta_j}{D} \right)^2\right) \left[\frac{e_2^{e_1}}{\Gamma(e_1)} \right] \left[\tau_\delta^{e_1-1} \exp(-e_2 \tau_\delta) \right].$$

Dengan kata lain dapat ditulis menjadi

$$[\tau_\delta | \cdot] \propto [\tau_\delta]^{e_1 + \frac{S}{2} - 1} \exp \left(- \left[\frac{1}{2} \sum_{s=1}^S D \delta_s^2 - \rho \sum_{s=1}^S \delta_s \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} \delta_j + \frac{\rho^2 \left(\sum_{j \in \mathcal{E}(s)} \delta_j \right)^2}{2D} + e_2 \right] \tau_\delta \right).$$

Karena τ_δ merupakan *hyperparameter* sebagai parameter presisi untuk salah satu komponen *trend* temporal δ_s yang diestimasi dan mengikuti distribusi gamma, sehingga membutuhkan nilai awal untuk membangkitkannya melalui Bayesian MCMC. Berdasarkan Definisi 2.2, diperoleh FCD untuk τ_δ adalah *closed form*, yaitu

$$\tau_\delta \sim G \left(e_1 + \frac{S}{2}, e_2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^S D (\delta_s^{(0)})^2 - \rho \sum_{s=1}^S \delta_s^{(0)} \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} \delta_j + \frac{\rho^2 \left(\sum_{j \in \mathcal{E}(s)} \delta_j \right)^2}{2D} \right),$$

dengan $\delta_s^{(0)}$ adalah nilai awal.

Rangkuman hasil analitik pembuktian Lemma 2.1 yang diuraikan di atas untuk mendapatkan FCDs BP2L S-T, disajikan dalam Tabel 4.2.

Tabel 4.2. FCDs BP2L S-T

$$\beta_0 \square flat()$$

$$\beta_p \square N \left(\frac{2\tau_\beta^{(0)} A_{11}}{A_{12}}, \tau_\beta^{(0)} \exp \left(- \left(\frac{2\tau_\beta^{(0)} A_{11}}{A_{12}} \right)^2 \right) \right)$$

$$u_s \sim N \left(\frac{2\tau_u^{(0)} B_{11}}{B_{12}}, \left(\tau_u^{(0)} \right)^S \exp \left(- \left(\frac{2\tau_u^{(0)} B_{11}}{B_{12}} \right)^2 \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
\nu_s &\sim N \left(\frac{2\tau_v^{(0)} C_{11}}{C_{12}}, \left(\tau_v^{(0)} D \right)^{-\frac{S}{2}} \exp \left(-\frac{2\tau_v^{(0)} C_{11}}{C_{12}} \right)^2 \right) \\
\alpha &\square N \left(\frac{2\tau_\alpha^{(0)} F_{11}}{F_{12}}, \tau_\alpha^{(0)} \exp \left(-\frac{2\tau_\alpha^{(0)} F_{11}}{F_{12}} \right)^2 \right) \\
\delta_s &\sim N \left(\frac{2\tau_\delta^{(0)} G_{11}}{G_{12}}, \left[\frac{1}{\tau_\delta^{(0)} D} \right]^{\frac{S}{2}} \exp \left[\left(\frac{\sqrt{\tau_\delta^{(0)}} \rho \sum_{j \in \varepsilon(s)} \delta_j}{\sqrt{2D}} \right)^2 - \left(\frac{2\tau_\delta^{(0)} G_{11}}{G_{12}} \right)^2 \right] \right) \\
\tau_\beta &\sim G \left(a_1 - \frac{1}{2}, a_2 + \frac{\left(\beta_p^{(0)} \right)^2}{2 \left(\tau_\beta^{(0)} \right)^2} \right) \\
\tau_u &\sim G \left(c_1 - \frac{S}{2}, \frac{\sum_{s=1}^S \left(u_s^{(0)} \right)^2}{2 \left(\tau_u^{(0)} \right)^2} + c_2 \right) \\
\tau_\alpha &\sim G \left(b_1 - \frac{1}{2}, b_2 + \frac{\left(\alpha^{(0)} \right)^2}{2 \left(\tau_\alpha^{(0)} \right)^2} \right) \\
\tau_v &\sim G \left(d_1 + \frac{S}{2}, d_2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^S D \left(v_s^{(0)} \right)^2 - \rho \sum_{s=1}^S v_s^{(0)} \sum_{j \in \varepsilon(s)} v_j + \frac{\rho^2 \left(\sum_{j \in \varepsilon(s)} v_j \right)^2}{2D} \right) \\
\tau_\delta &\sim G \left(e_1 + \frac{S}{2}, e_2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^S D \left(\delta_s^{(0)} \right)^2 - \rho \sum_{s=1}^S \delta_s^{(0)} \sum_{j \in \varepsilon(s)} \delta_j + \frac{\rho^2 \left(\sum_{j \in \varepsilon(s)} \delta_j \right)^2}{2D} \right)
\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil secara analitik untuk BP2L S-T, disimpulkan bahwa FCDs untuk semua parameter yang ada dalam $\boldsymbol{\theta}$ bersifat *closed form*. Rangkuman proses analitik dalam Tabel 4.2 digunakan sebagai dasar menyusun prosedur untuk mendapatkan estimasi parameter BP2L S-T, yang dibangkitkan sebanyak m kali iterasi menggunakan MCMC Gibbs sampler. Prosedur estimasi parameter menggunakan Gibbs sampler, disajikan dalam Algoritma 4.1.

Algoritma 4.1. Algoritma MCMC Gibbs sampler untuk mendapatkan estimasi parameter BP2L S-T, dibangkitkan sebanyak m kali iterasi.

- $\beta_0^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[\beta_0 | \cdot]$,
- $\beta_p^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[\beta_p | \cdot]$, $p = 1, \dots, P$,
- $\alpha^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[\alpha | \cdot]$,
- $u_s^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[u_s | \cdot]$, $s = 1, \dots, S$,
- $v_s^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[v_s | \cdot]$, $s = 1, \dots, S$,
- $\delta_s^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[\delta_s | \cdot]$, $s = 1, \dots, S$,
- $\tau_\alpha^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[\tau_\alpha | \cdot]$,
- $\tau_u^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[\tau_u | \cdot]$,
- $\tau_v^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[\tau_v | \cdot]$,
- $\tau_\delta^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[\tau_\delta | \cdot]$,
- $\tau_\beta^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[\tau_\beta | \cdot]$.

4.3 Perluasan BP2L S-T

Tahapan PBP2L S-T adalah

1. Menyusun struktur PBP2L S-T, dimana kedua komponen efek random lokal dan global dimodifikasi masing-masing menjadi bervariasi *spatio-temporal*,
2. Menentukan *joint prior*, mengandung semua parameter model yang diestimasi,
3. Menyusun fungsi likelihood,
4. Menyusun *joint posterior*, merupakan perkalian antara *joint prior* (langkah 2) dan fungsi likelihood (langkah 3) yang mengikuti Definisi 1.2,
5. Mendapatkan FCDs, berdasarkan langkah 4 yang mengikuti aturan dalam Definisi 1.3,
6. Menentukan sifat FCDs model, berdasarkan hasil langkah 5 yang mengikuti aturan dalam Definisi 1.4.

Model PBP2L S-T merupakan pengembangan model BP2L S-T, yang hanya difokuskan terhadap modifikasi dua komponen efek random lokal (u_{st}) dan global (v_{st}). Kedua komponen efek random lokal dan global dalam BP2L S-T masing-masing bervariasi spasial, sedangkan dalam PBP2L S-T kedua komponen efek randomnya masing-masing dimodifikasi bervariasi *spatio-temporal*. Komponen heterogenitas spasial sebagai efek tetap dan komponen *trend* temporal dalam PBP2L S-T diperlakukan sama dengan BP2L S-T. Seperti halnya BP2L S-T yang telah diuraikan cara estimasi parameternya menggunakan Gibbs sampler, maka estimasi parameter dalam PBP2L S-T terlebih dahulu harus ditentukan FCDs-nya pula.

Untuk mendapatkan FCDs PBP2L S-T dilakukan serupa seperti dalam BP2L S-T. FCDs model PBP2L S-T diselesaikan secara analitik berdasarkan *joint posterior* (1.20) yaitu perkalian antara likelihood dan *joint prior*, seperti diuraikan dalam persamaan berikut.

$$p(\lambda | y_{1t}, \dots, y_{St}) = \left(\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S \frac{\left[e_{st} \exp \left(\beta_0 + \sum_{p=1}^P \beta_p x_{pst} + u_{st} + v_{st} + (\alpha + \delta_s) t_z \right) \right]^{y_{st}}}{y_{st}!} \right) \times Z_9 \times Z_{10},$$

dengan

$$Z_9 = \exp \left[- \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp \left(\beta_0 + \sum_{p=1}^P \beta_p x_{pst} + u_{st} + v_{st} + (\alpha + \delta_s) t_z \right) \right],$$

$$Z_{10} = p(\lambda) = p(\beta_0) p(\beta_p | \tau_\beta) p(\alpha | \tau_\alpha) p(u_{st} | \tau_u) p(v_{st} | \tau_v) p(\delta_s | \tau_\delta) p(\tau_\alpha) p(\tau_u) p(\tau_v) p(\tau_\delta) p(\tau_\beta),$$

$$\text{dan } \lambda = \{\beta_0, \beta_p, \alpha, u_{st}, v_{st}, \delta_s, \tau_\beta, \tau_u, \tau_v, \tau_\alpha\}.$$

Koleksi distribusi *prior* untuk PBP2L S-T, disajikan dalam Tabel 4.3, yang hanya disajikan distribusi *prior* untuk kedua komponen efek random saja. Sementara itu, untuk distribusi *prior* lainnya telah disajikan dalam Tabel 4.1.

Lemma 4.2

Jika diberikan model PBP2L S-T dan *joint posterior*, mengikuti asumsi model BP2L S-T, maka FCDs PBP2L S-T bersifat *closed form*.

Bukti.

Bukti hanya diuraikan FCD untuk efek random lokal (u_{st}) dan global (v_{st}) karena uraian untuk parameter lainnya serupa dengan Lemma 4.1.

Tabel 4.3. Koleksi distribusi *prior* dan *hyperprior* PBP2L S-T (Mukhsar, Iriawan, Ulama, Sutikno, dan Kuswanto, 2013)

Nama parameter	Distribusi prior
u_{st}	$u_{st} \tau_u \sim N(0, \tau_u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \exp\left(-\frac{u_{st}^2}{2\tau_u}\right)$
v_{st}	$v_{st} \tau_v \sim N\left(\rho \frac{\sum_{j \in \varepsilon(s)} v_j}{D}, \frac{1}{\tau_v D}\right) = \sqrt{\frac{\tau_v D}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tau_v D}{2} \left(v_{it} - \frac{\sum_{j \in \varepsilon(s)} v_j}{D}\right)^2\right)$
Distribusi hyperprior	
τ_u	$\tau_u \sim G(c_1, c_2) = \frac{c_2^{c_1}}{\Gamma(c_1)} \tau_u^{b_1-1} \exp(-c_2 \tau_u)$
τ_v	$\tau_v \sim G(d_1, d_2) = \frac{d_2^{d_1}}{\Gamma(d_1)} \tau_v^{d_1-1} \exp(-d_2 \tau_v)$

FCD untuk u_{st}

Didefinisikan

$$p(u_{st} | y_{1t}, \dots, y_{St}, \beta_0, \beta_p, v_{st}, \alpha, \delta_s, \tau_\beta, \tau_\alpha, \tau_u, \tau_v, \tau_\delta) \equiv [u_{st} | \cdot]$$

menurut Definisi 2.1, bahwa parameter selain u_{st} dianggap konstan, sehingga diperoleh

$$[u_{st} | \cdot] \propto \left(\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S [e_{st} \exp(u_{st})]^{y_{st}} \exp\left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(u_{st})\right] \right) \prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \exp\left(-\frac{u_{st}^2}{2\tau_u}\right).$$

Karena $\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S [e_{st}]^{y_{st}}$ adalah konstan sehingga dapat diabaikan, maka dituliskan menjadi

$$[u_{st} | \cdot] \propto \left(\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S [\exp(u_{st})]^{y_{st}} \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(u_{st}) \right] \right) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \right]^{ST} \prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S \exp \left(-\frac{u_{st}^2}{2\tau_u} \right).$$

Jika diuraikan, maka diperoleh

$$[u_{st} | \cdot] \propto \left[[\exp(u_{11})]^{y_{11}} \dots [\exp(u_{1T})]^{y_{1T}} \dots [\exp(u_{S1})]^{y_{S1}} \dots [\exp(u_{ST})]^{y_{ST}} \right] \times Z_{11},$$

dengan

$$Z_{11} = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \right]^{ST} \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(u_{st}) \right] \prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S \exp \left(-\frac{u_s^2}{2\tau_u} \right),$$

atau

$$[u_{st} | \cdot] \propto \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S u_{st} y_{st} \right] \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(u_{st}) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \right]^{ST} \exp \left(-\frac{\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S u_{st}^2}{2\tau_u} \right).$$

Dengan kata lain dapat ditulis menjadi

$$[u_{st} | \cdot] \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \right]^{ST} \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S u_{st} y_{st} - \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(u_{st}) - \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S u_{st}^2}{2\tau_u} \right].$$

Jika bagian $\exp(u_{st})$ diuraikan dengan pendekatan Taylor disekitar titik $u_{st}^* = 0$, berakibat

$$[u_{st} | \cdot] \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \right]^{ST} \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S u_{st} y_{st} - \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} (1 + u_{st} + \frac{1}{2} u_{st}^2) - \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S u_{st}^2}{2\tau_u} \right].$$

Sehingga diuraikan menjadi

$$[u_{st} | \cdot] \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \right]^{ST} \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \left((y_{st} - e_{st}) u_{st} - \frac{1}{2\tau_u} (1 + \tau_u e_{st}) u_{st}^2 \right) \right].$$

Misalkan

$$B_{21} = \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (y_{st} - e_{st}), \text{ dan } B_{22} = \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (1 + \tau_u e_{st}),$$

sehingga

$$[u_{st} | \cdot] \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \right]^{ST} \exp \left[B_{21} u_{st} - \frac{1}{2\tau_u} B_{22} u_{st}^2 \right].$$

dapat ditulis

$$[u_{st} | \cdot] \propto \exp \left(-\frac{2\tau_u B_{21}}{B_{22}} \right)^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \right]^{ST} \exp \left[-\frac{1}{2\tau_u} \left(\frac{-2\tau_u B_{21}}{B_{22}} + u_{st} \right)^2 \right].$$

Karena u_{st} merupakan efek random lokal di lokasi s waktu t dianggap sebagai parameter yang diestimasi dan mengikuti distribusi normal, sehingga membutuhkan nilai awal untuk membangkitkannya melalui Bayesian MCMC. Berdasarkan Definisi 2.2, diperoleh FCD untuk u_{st} adalah *closed form*, yaitu

$$u_{st} \sim N \left(\frac{2\tau_u^{(0)} B_{21}}{B_{22}}, \left(\tau_u^{(0)} \right)^{ST} \exp \left(-\frac{2\tau_u^{(0)} B_{21}}{B_{22}} \right)^2 \right),$$

dengan $\tau_u^{(0)}$ adalah nilai awal.

FCD untuk v_{st}

Didefinisikan

$$p(v_{st} | y_{1t}, \dots, y_{St}, \beta_0, \beta_p, u_{st}, \alpha, \delta_s, \tau_\beta, \tau_\alpha, \tau_u, \tau_v, \tau_\delta) \equiv [v_{st} | \cdot]$$

menurut Definisi 2.1, bahwa parameter selain v_{st} dianggap konstan, sehingga diperoleh

$$[v_{st} | \cdot] \propto \left(\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S [e_{st} \exp(v_{st})]^{y_{st}} \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(v_{st}) \right] \right) \times Z_{12},$$

dengan

$$Z_{12} = \prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S \left[\sqrt{\frac{\tau_v D}{2\pi}} \exp \left(-\frac{\tau_v D}{2} \left(v_{st} - \rho \frac{\sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j}{D} \right)^2 \right) \right]$$

Karena $\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S [e_{st}]^{y_{st}}$ adalah konstan sehingga dapat diabaikan,

maka diperoleh

$$[u_{st} | \cdot] \propto \left(\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S [\exp(u_{st})]^{y_{st}} \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(u_{st}) \right] \right) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \right]^{ST} \prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S \exp \left(-\frac{u_{st}^2}{2\tau_u} \right).$$

dengan

$$Z_{13} = \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(v_{st}) \right] \prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S \exp \left(-\frac{\tau_v D}{2} \left(v_{st} - \rho \frac{\sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j}{D} \right)^2 \right),$$

$$Z_{14} = \left[\frac{\tau_v D}{2\pi} \right]^{\frac{ST}{2}}.$$

dapat ditulis menjadi

$$[v_{st} | \cdot] \propto \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S v_{st} y_{st} \right] \exp \left[-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(v_{st}) \right] \left[\frac{\tau_v D}{2\pi} \right]^{\frac{ST}{2}} \times Z_{15},$$

dengan

$$Z_{15} = \exp \left(-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \frac{\tau_v D}{2} \left(v_{st} - \rho \frac{\sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j}{D} \right)^2 \right).$$

Oleh karena itu berakibat,

$$[v_{st} | \cdot] \propto \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S v_{st} y_{st} - \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \exp(v_{st}) - \frac{\tau_v}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S D v_{st}^2 \right] + \\ \exp \left(\rho \tau_v \sum_{t=1}^T \left(\sum_{s=1}^S v_{st} \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j \right) - \frac{\rho^2 \tau_v \left(\sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j \right)^2}{2D} \right) \times \left[\frac{\tau_v D}{2\pi} \right]^{\frac{ST}{2}}.$$

Bagian $\exp(v_{st})$ diuraikan menggunakan pendekatan Taylor disekitar titik $v_{st}^* = 0$, sehingga

$$[v_{st} | \cdot] \propto \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S v_{st} y_{st} - \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} (v_{st} + \frac{1}{2} v_{st}^2) - \frac{\tau_v}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S D v_{st}^2 + \rho \tau_v \sum_{t=1}^T \left(\sum_{s=1}^S v_{st} \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j \right) \right] \times Z_{16},$$

dengan

$$Z_{16} = \left[\frac{\tau_v D}{2\pi} \right]^{\frac{ST}{2}},$$

atau dapat ditulis

$$[v_{st} | \cdot] \propto \exp \left[\sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{s=1}^S \left(y_{st} - e_{st} + \rho \tau_v \sum_{j \in \varepsilon(s)} v_j \right) v_{st} - \frac{1}{2\tau_v} (\tau_v^2 D + \tau_v) v_{st}^2 \right\} \right] \left[\frac{\tau_v D}{2\pi} \right]^{\frac{ST}{2}}.$$

Misalkan

$$C_{21} = \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \left(y_{st} - e_{st} + \rho \tau_v \sum_{j \in \varepsilon(s)} v_j \right), \text{ dan } C_{22} = \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (\tau_v^2 D + \tau_v),$$

sehingga dapat ditulis menjadi

$$[v_{st} | \cdot] \propto \exp \left[C_{21} v_{st} - \frac{1}{2\tau_v} C_{22} v_{st}^2 \right] \left\{ \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} \right] \left[\frac{\tau_v D}{2\pi} \right]^{\frac{ST}{2}} \right\},$$

atau

$$[v_{st} | \cdot] \propto \left\{ \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} - \left(\frac{2\tau_v C_{21}}{C_{22}} \right)^2 \right] \right\} \left[\frac{\tau_v D}{2\pi} \right]^{\frac{ST}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\tau_v} \left(-\frac{2\tau_v C_{21}}{C_{22}} + v_{st} \right)^2 \right].$$

Karena u_{st} merupakan efek random global di lokasi s waktu t dianggap sebagai parameter yang diestimasi dan mengikuti distribusi normal, sehingga membutuhkan nilai awal untuk membangkitkannya melalui Bayesian MCMC. Berdasarkan Definisi 2.2, diperoleh FCD untuk v_{st} adalah *closed form*, yaitu

$$v_{st} \sim N \left(\frac{2\tau_v^{(0)} C_{21}}{C_{22}}, \left[\tau_v^{(0)} D \right]^{\frac{ST}{2}} \exp \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} - \left(\frac{2\tau_v^{(0)} C_{21}}{C_{22}} \right)^2 \right] \right),$$

dengan $\tau_v^{(0)}$ adalah nilai awal.

FCD untuk τ_u

Didefinisikan

$$p(\tau_u | y_{1t}, \dots, y_{St}, \beta_0, \beta_p, u_{st}, v_{st}, \alpha, \delta_s, \tau_\beta, \tau_\alpha, \tau_v, \tau_\delta) = [\tau_u | \cdot],$$

menurut Definisi 2.1, parameter selain τ_u dianggap konstan, sehingga diperoleh

$$[\tau_u | \cdot] \propto \prod_{t=1}^T \left[\prod_{s=1}^S \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \exp\left(-\frac{u_{st}^2}{2\tau_u}\right) \right] \left(\frac{c_2^{c_1}}{\Gamma(c_1)} \tau_u^{c_1-1} \exp(-c_2\tau_u) \right).$$

Jika diuraikan, maka menjadi

$$[\tau_u | \cdot] \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_u}} \right]^{ST} \prod_{t=1}^T \left[\prod_{s=1}^S \exp\left(-\frac{u_{st}^2}{2\tau_u}\right) \right] \left(\frac{c_2^{c_1}}{\Gamma(c_1)} \tau_u^{c_1-1} \exp(-c_2\tau_u) \right),$$

atau

$$[\tau_u | \cdot] \propto \left[\frac{c_2^{c_1}}{\Gamma(c_1)} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right]^{ST} [\tau_u]^{\left(c_1 - \frac{ST}{2}\right) - 1} \exp\left(-\left(\frac{\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S u_{st}^2}{2\tau_u^2} + c_2\right)\tau_u\right).$$

Karena τ_u merupakan *hyperparameter* sebagai parameter presisi untuk random lokal u_{st} di lokasi s waktu t yang diestimasi dan mengikuti distribusi gamma, sehingga membutuhkan nilai awal untuk membangkitkannya melalui Bayesian MCMC. Berdasarkan Definisi 2.2, diperoleh FCD untuk τ_u adalah *closed form*, yaitu

$$\tau_u \square G \left(c_1 - \frac{ST}{2}, c_2 + \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (u_{st}^{(0)})^2}{2(\tau_u^{(0)})^2} \right),$$

dengan $u_{st}^{(0)}$ dan $\tau_u^{(0)}$ adalah nilai awal.

FCD untuk τ_v

Didefinisikan

$$p(\tau_v | y_{lt}, \dots, y_{St}, \beta_0, \beta_p, u_{st}, v_{st}, \alpha, \delta_s, \tau_\beta, \tau_\alpha, \tau_u, \tau_\delta) = [\tau_v | \cdot],$$

menurut Definisi 2.1, bahwa parameter selain τ_v dianggap konstan, sehingga diperoleh

$$[\tau_v | \cdot] \propto \left(\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S \left(\sqrt{\frac{\tau_v D}{2\pi}} \exp \left(-\frac{\tau_v D}{2} \left(v_{st} - \rho \frac{\sum_{j \in \varepsilon(s)} v_j}{D} \right)^2 \right) \right) \right) \left(\frac{d_2^{d_1}}{\Gamma(d_1)} \tau_v^{d_1-1} \exp(-d_2 \tau_v) \right).$$

Jika diuraikan, maka

$$[\tau_v | \cdot] \propto \left(\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S \exp \left(-\frac{\tau_v D}{2} \left(v_{st} - \rho \frac{\sum_{j \in \varepsilon(s)} v_j}{D} \right)^2 \right) \right) \times \left[\frac{\tau_v D}{2\pi} \right]^{\frac{ST}{2}} \times \left(\frac{d_2^{d_1}}{\Gamma(d_1)} \tau_v^{d_1-1} \exp(-d_2 \tau_v) \right),$$

atau

$$[\tau_v | \cdot] \propto \left(\prod_{t=1}^T \prod_{s=1}^S \exp \left(-\frac{\tau_v D}{2} \left(v_{st} - \rho \frac{\sum_{j \in \varepsilon(s)} v_j}{D} \right)^2 \right) \right) \times \left[\frac{\tau_v D}{2\pi} \right]^{\frac{ST}{2}} \times \left[\frac{d_2^{d_1}}{\Gamma(d_1)} \right] \times (\tau_v^{d_1-1} \exp(-d_2 \tau_v)).$$

Jika diuraikan, maka diperoleh

$$[\tau_v | \cdot] \propto \left[\frac{d_2^{d_1}}{\Gamma(d_1)} \right] \times \left[\frac{D}{2\pi} \right]^{\frac{ST}{2}} \times [\tau_v]^{(d_1+ST/2)-1} \times \exp \left(-\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \frac{\tau_v D}{2} \left(v_{it} - \rho \frac{\sum_{j \in \varepsilon(s)} v_j}{D} \right)^2 - d_2 \tau_v \right).$$

berakibat

$$[\tau_v | \cdot] \propto \left[\frac{d_2^{d_1}}{\Gamma(d_1)} \right] \left[\frac{D}{2\pi} \right]^{\frac{ST}{2}} [\tau_v]^{(d_1 + nT/2) - 1} \times Z_{17},$$

dengan

$$Z_{17} = \exp \left(- \left(\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S D v_{st}^2 - \rho \sum_{t=1}^T \left(\sum_{s=1}^S v_{st} \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j \right) + \frac{\rho^2 \left(\sum_{t=1}^T \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j \right)^2}{2D} + d_2 \right) \tau_v \right).$$

Karena τ_v merupakan *hyperparameter* sebagai parameter presisi untuk random global v_{st} di lokasi s waktu t yang diestimasi dan mengikuti distribusi gamma, sehingga membutuhkan nilai awal untuk membangkitkannya melalui Bayesian MCMC. Berdasarkan Definisi 2.2, diperoleh FCD untuk τ_v adalah *closed form*, yaitu

$$\tau_v \perp G \left(d_1 + \frac{ST}{2}, d_2 + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S D (v_{st}^{(0)})^2 - \rho \sum_{t=1}^T \left(\sum_{s=1}^S v_{st}^{(0)} \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j \right) + \frac{\rho^2 \left(\sum_{t=1}^T \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j \right)^2}{2D} \right),$$

dengan $v_{st}^{(0)}$ adalah nilai awal.

Ringkasan proses untuk mendapatkan FCDs PBP2L S-T sebagai bukti Lemma 4.2, selengkapnya disajikan pada Tabel 4.4.

Tabel 4.4. FCDs PBP2L S-T

$$\beta_0 \square flat0$$

$$\beta_p \square N\left(\frac{2\tau_\beta^{(0)}A_{21}}{A_{22}}, \tau_\beta^{(0)} \exp\left(-\left(\frac{2\tau_\beta^{(0)}A_{21}}{A_{22}}\right)^2\right)\right)$$

$$u_{st} \sim N\left(\frac{2\tau_u^{(0)}B_{21}}{B_{22}}, \left(\tau_u^{(0)}\right)^{ST} \exp\left(-\frac{2\tau_u^{(0)}B_{21}}{B_{22}}\right)^2\right)$$

$$v_{st} \sim N\left(\frac{2\tau_v^{(0)}C_{21}}{C_{22}}, \left[\tau_v^{(0)}D\right]^{-\frac{ST}{2}} \exp\left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S e_{st} - \left(\frac{2\tau_v^{(0)}C_{21}}{C_{22}}\right)^2\right]\right)$$

$$\alpha \square N\left(\frac{2\tau_\alpha^{(0)}F_{21}}{F_{22}}, \tau_\alpha^{(0)} \exp\left(-\frac{2\tau_\alpha^{(0)}F_{21}}{F_{22}}\right)^2\right)$$

$$\delta_s \sim N\left(\frac{2\tau_\delta^{(0)}G_{21}}{G_{22}}, \left[\frac{1}{\tau_\delta^{(0)}D}\right]^{-\frac{S}{2}} \exp\left[\left(\frac{\sqrt{\tau_\delta^{(0)}}\rho \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} \delta_j}{\sqrt{2D}}\right)^2 - \left(\frac{2\tau_\delta^{(0)}G_{21}}{G_{22}}\right)^2\right]\right)$$

$$\tau_\beta \sim G\left(a_1 - \frac{1}{2}, a_2 + \frac{\left(\beta_p^{(0)}\right)^2}{2\left(\tau_\beta^{(0)}\right)^2}\right), \quad \tau_u \square G\left(c_1 - \frac{ST}{2}, c_2 + \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \left(u_{st}^{(0)}\right)^2}{2\left(\tau_u^{(0)}\right)^2}\right)$$

$$\tau_v \square G\left(d_1 + \frac{ST}{2}, d_2 + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S D \left(v_{st}^{(0)}\right)^2 - \rho \sum_{t=1}^T \left(\sum_{s=1}^S v_{st}^{(0)} \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j\right) + \frac{\rho^2 \left(\sum_{t=1}^T \sum_{j \in \mathcal{E}(s)} v_j\right)^2}{2D}\right)$$

$$\tau_\alpha \sim G\left(b_1 - \frac{1}{2}, b_2 + \frac{(\alpha^{(0)})^2}{2(\tau_\alpha^{(0)})^2}\right)$$

$$\tau_\delta \sim G\left(e_1 + \frac{S}{2}, e_2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^S D(\delta_s^{(0)})^2 - \rho \sum_{s=1}^S \delta_s^{(0)} \sum_{j \in \varepsilon(s)} \delta_j + \frac{\rho^2 \left(\sum_{j \in \varepsilon(s)} \delta_j \right)^2}{2D}\right)$$

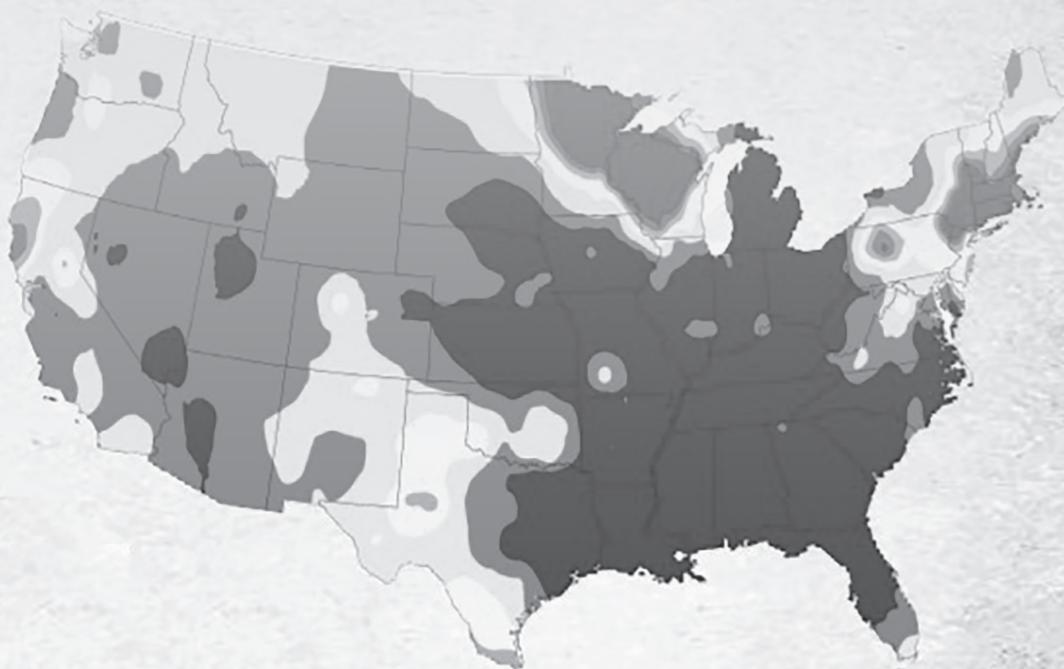
Hasil analitik untuk PBP2L S-T, menunjukkan FCDs semua parameter dalam λ bersifat *closed form*. Masing-masing parameter dalam Tabel 4.4 dibangkitkan sebanyak m kali iterasi menggunakan MCMC Gibbs sampler, seperti disajikan dalam Algoritma 4.2.

Algoritma 4.2. Prosedur Gibbs sampler untuk mengestimasi parameter model PBP2L S-T, sebanyak m kali iterasi.

- $\beta_0^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[\beta_0 | \cdot]$,
- $\beta_p^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[\beta_p | \cdot], p = 1, \dots, P$,
- $\alpha^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[\alpha | \cdot]$,
- $u_{1t}^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[u_{1t} | \cdot], t = 1, \dots, T$,
- ⋮
- $u_{31t}^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[u_{31t} | \cdot], t = 1, \dots, T$,
- $v_{1t}^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[v_{1t} | \cdot], t = 1, \dots, T$,
- ⋮

- $v_{31t}^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[v_{31t}|.]$, $t = 1, \dots, T$,
- $\delta_s^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[\delta_s|.]$, $s = 1, \dots, S$,
- $\tau_\alpha^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[\tau_\alpha|.]$,
- $\tau_u^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[\tau_u|.]$,
- $\tau_v^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[\tau_v|.]$,
- $\tau_\delta^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[\tau_\delta|.]$,
- $\tau_\beta^{(m)}$ dibangkitkan dalam $[\tau_\beta|.]$.

SIMULASI NUMERIK



5.1 Estimasi Parameter Model dengan WinBUGS

Estimasi parameter model digenerate pada WinBUGS mengikuti prosedur Gibbs sampler Bayesian MCMC. Estimasi parameter model MBP2L dan perluasan MBP2L spasio temporal digenerate secara terpisah dan dari hasil estimasinya kemudian dilakukan uji untuk menentukan performance kedua model. Model dengan performance baik dipilih sebagai model terbaik dan digunakan untuk menganalisis resiko relative kasus DBD di kota Surabaya.

Pengembangan model *convolution* menjadi model spasio temporal telah diperkenalkan oleh Eckert dkk. (2007) dan Neyens dkk. (2011) dengan menambahkan *trend temporal* dan resiko log relative pada model. Namun, demikian pada model tersebut memandang faktor ketidakpastian atau efek random *uncorrelated* dan *correlated* dipandang secara spasial. Sementara itu, mobilitas aktual masyarakat (atau efek random) tidak cukup hanya dipandang secara spasial tetapi juga secara temporal.

Secara analitik estimasi parameter MBP2L spasio temporal sulit dilakukan karena melibatkan integral berdimensi tinggi, sehingga digenerate pada WinBUGS berdasarkan *full conditional distribution*. Karena *full conditional distribution* MBP2L spasio temporal bersifat *closed form* (Akibat 4.1) maka metode Gibbs sampler Bayesian MCMC menjadi pilihan estimasi parameter model (Karlis dan Ntzoufras, 2006). MBP2L spasio temporal merupakan model yang mengandung CAR model karena terdapat hubungan dependensi spasial antar lokasi didalamnya. Model CAR yang dimaksudkan pada MBP2L spasio temporal ini mengikuti definisi yang diberikan oleh Jin, dkk., (2005) adalah efek random *correlated heterogeneity*:

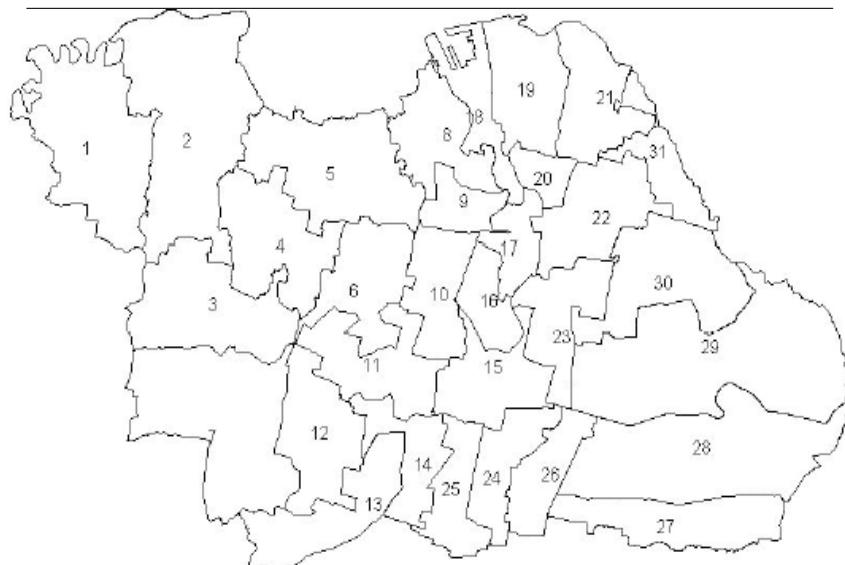
$$v_{it} | v_{j,j \neq i} \sim N \left(\rho \sum_{j \in \varepsilon(i)}^n \frac{v_j}{D_i}, \frac{1}{\tau_v D_i} \right),$$

dan log *relative*:

$$\delta_i | \delta_{j,j \neq i} \sim N \left(\rho \sum_{j \in \varepsilon(i)}^n \frac{\delta_j}{D_i}, \frac{1}{\tau_\delta D_i} \right),$$

dimana D_i (pada WinBUGS direpresentasikan dengan SumNumNeigh) adalah banyaknya tetangga lokasi i , $-1 \leq \rho \leq 1$, dan $\varepsilon(i)$ (pada WinBUGS direpresentasikan dengan Num) merupakan jumlah tetangga lokasi i (Lawson dkk., 2003; Lawson, 2008). Hubungan ketetanggaan antar lokasi dan pemberian nomor lokasi dilakukan oleh penelitian dan setiap input data pada WinBUGS harus mengikuti aturan penomoran lokasi tersebut. WinBUGS untuk mengakomodasi model CAR yang terkandung pada MBP2L spasio temporal.

Full conditional distribution MBP2L spasio temporal, kemudian digunakan untuk estimasi parameter model menggunakan data DBD perkecamatan perbulan di kota Surabaya selama periode waktu tahun 2001-2010. Jumlah kecamatan yang ada di kota Surabaya sebanyak 31 kecamatan dengan waktu observasi selama 120 bulan (tahun 2001-tahun 2010). Estimasi parameter model dilakukan per blok sebanyak m kali iterasi, mengikuti prosedur Gibbs sampler, dan dimodifikasi untuk MBP2L spasio temporal mengikuti penomoran pada Gambar 5.1.



Gambar 5.1 Nomor lokasi (atau kecamatan) kota Surabaya, penomoran ini dilakukan oleh peneliti dan dapat dilakukan penomoran versi lainnya sesuai peneliti

Pemberian nomor setiap kecamatan di Kota Surabaya seperti yang disajikan pada Gambar 5.1, kemudian diinterpretasikan menjadi matrik ketetanggaan seperti yang diuraikan pada Tabel 5.1.

Tabel 5.1 Matriks hubungan ketetanggaan antar lokasi

No. Lokasi	Kecamatan/Lokasi	Ketetanggaan (Adj.)	$\varepsilon(i)$ (num)
1	Pakal	2	1
2	Benowo	1,3,4,5	4
3	Sabikerep	2,7,4,5,12,6,11	7
4	Tandes	2,3,5,6	4
5	Asemrowo	2,4,6,8,9,10,3	7
6	Sukomanunggal	3,7,4,5,12,11,10	7
7	Lakarsantri	3,13,12,11,6	5

No. Lokasi	Kecamatan/Lokasi	Ketetanggaan (Adj.)	$\varepsilon(i)$ (num)
8	Krembangan	5,9,18,17	4
9	Bubutan	5,10,8,18,17	5
10	Sawahan	5,6,11,9,15,16,17	7
11	Dukuh Pakis	3,7,12,6,14,10,25,15	8
12	Wiyung	3,7,13,6,11,14	6
13	Karang Pilang	7,12,14	3
14	Jambangan	13,12,11,25,15	5
15	Wonokromo	11,14,10,25,16,24,23,26	8
16	Tegalsari	10,15,17,23	4
17	Genteng	10,8,9,16,18,23,20,22	8
18	Pabean Cantikan	8,9,17,20,19	5
19	Semampir	18,20,21	3
20	Simokerto	17,18,19,22,21	5
21	Kenjeran	20,19,22,31	4
22	Tambaksari	17,20,23,21,31,30	6
23	Gubeng	24,15,16,17,26,22,30,29	8
24	Wonocolo	25,15,26,23	4
25	Gayungan	11,14,15,24	4
26	Tenggilis	15,24,23,27,28,29	6
27	Gunung Anyar	26,28	2
28	Rungkut	26,27,29	3
29	Sukolilo	26,23,28,30	4
30	Mulyorejo	23,22,31,29	4
31	Bulak	22,21,30	3
D_i (SumNumNeigh)			154

Full conditional distribution MBP2L spasio temporal untuk meng-generate parameter model yang diuraikan berikut:

- $\beta_0^{(m)}$ di-generate pada $[\beta_0 | \cdot]$, dimana

$$[\beta_0 | \cdot] \propto \exp \left[\sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} \left(y_{it} \beta_0^{(0)} - e_{it} \exp(\beta_0^{(0)}) \right) + \log \left(\left[\prod_{t=1}^{120} \prod_{i=1}^{31} [e_{it}]^{y_{it}} \right] H_1 \right) \right], H_1 \text{ konstan}$$

- $\beta_k^{(m)}$ di-generate pada $[\beta_k | \cdot], k = 1, 2, 3, 4$, dimana

$$[\beta_k | \cdot] \propto N \left(\frac{2\tau_\beta^{(0)} A_{11}}{A_{12}}, \tau_\beta^{(0)} H_2 \left[\prod_{t=1}^{120} \prod_{i=1}^{31} [e_{it}]^{y_{it}} \right] \exp \left(\sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} e_{it} - \left(\frac{2\tau_\beta^{(0)} A_{11}}{A_{12}} \right)^2 \tau_\beta^{(0)} \right) \right),$$

$$A_{11} = \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} \left(y_{it} - e_{it} \sum_{k=1}^4 x_{kit}^\top \right), A_{12} = \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} \left(1 + \tau_\beta^{(0)} e_{it} \sum_{k=1}^4 (x_{kit}^\top)^2 \right), H_2 \text{ konstan}$$

- $u_i^{(m)}$ di-generate pada $[u_i | \cdot], i = 1, \dots, 31$, dimana

$$[u_i | \cdot] \sim N \left(\frac{2\tau_u^{(0)} B_{11}}{B_{12}}, (\tau_u^{(0)})^{31} H_3 \exp \left(- \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} e_{it} - \left(\frac{2\tau_u^{(0)} B_{11}}{B_{12}} \right)^2 \right) \right),$$

$$B_{11} = \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} (y_{it} - e_{it}), B_{12} = \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} (\tau_u^{(0)} e_{it} + 1), H_3 \text{ konstan}$$

- $v_i^{(m)}$ di-generate pada $[v_i | \cdot], i = 1, \dots, 31$, dimana

$$[v_i | \cdot] \sim N \left(\frac{2\tau_v^{(0)} C_{11}}{C_{12}}, (\tau_v^{(0)} D_i)^{-\frac{31}{2}} H_4 \exp \left[\sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} e_{it} - \left(\frac{2\tau_v^{(0)} C_{11}}{C_{12}} \right)^2 \right] \right),$$

$$C_{11} = \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} \left(y_{it} - e_{it} + \rho \tau_v^{(0)} \sum_{j \in \varepsilon(i)}^{31} v_j \right), C_{12} = \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} \left(\tau_v^{(0)} e_{it} - (\tau_v^{(0)})^2 D_i \right), H_4 \text{ konstan}$$

- $\alpha^{(m)}$ di-generate pada $[\alpha \cdot]$, dimana

$$[\alpha \cdot] \sim N \left(\frac{2\tau_\alpha^{(0)} F_{11}}{F_{12}}, \tau_\alpha^{(0)} H_5 \exp \left[\prod_{t=1}^{120} \prod_{i=1}^{31} [e_{it}]^{y_{it}} - \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} e_{it} - \left(\frac{2\tau_\alpha^{(0)} F_{11}}{F_{12}} \right)^2 \right] \right),$$

$$F_{11} = \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} (y_{it} - e_{it}), F_{12} = \left(\sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} (e_{it} \tau_\alpha^{(0)} + 1) \right), H_5 \text{ konstan}$$

- $\delta_i^{(m)}$ di-generate pada $[\delta_i \cdot]$, $i = 1, \dots, 31$, dimana

$$[\delta_i \cdot] \sim N \left(\frac{2\tau_\delta^{(0)} G_{11}}{G_{12}}, \left[\frac{1}{\tau_\delta^{(0)} D_i} \right]^{\frac{31}{2}} H_6 \exp \left[\prod_{t=1}^{120} \prod_{i=1}^{31} [e_{it}]^{y_{it}} - \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} e_{it} + \left(\frac{\sqrt{\tau_\delta^{(0)}} \rho \sum_{j \in \varepsilon(i)} \delta_j}{\sqrt{2D_i}} \right)^2 - \left(\frac{2\tau_\delta^{(0)} G_{11}}{G_{12}} \right)^2 \right] \right),$$

$$G_{11} = \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} \left(y_{it} - e_{it} + \tau_\delta^{(0)} \rho \sum_{j \in \varepsilon(i)} \delta_j \right), G_{12} = \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} \left(\tau_\delta^{(0)} e_{it} - (\tau_\delta^{(0)})^2 D_i \right), H_6 \text{ konstan}$$

- $\tau_\beta^{(m)}$ di-generate pada $[\tau_\beta \cdot]$, dimana

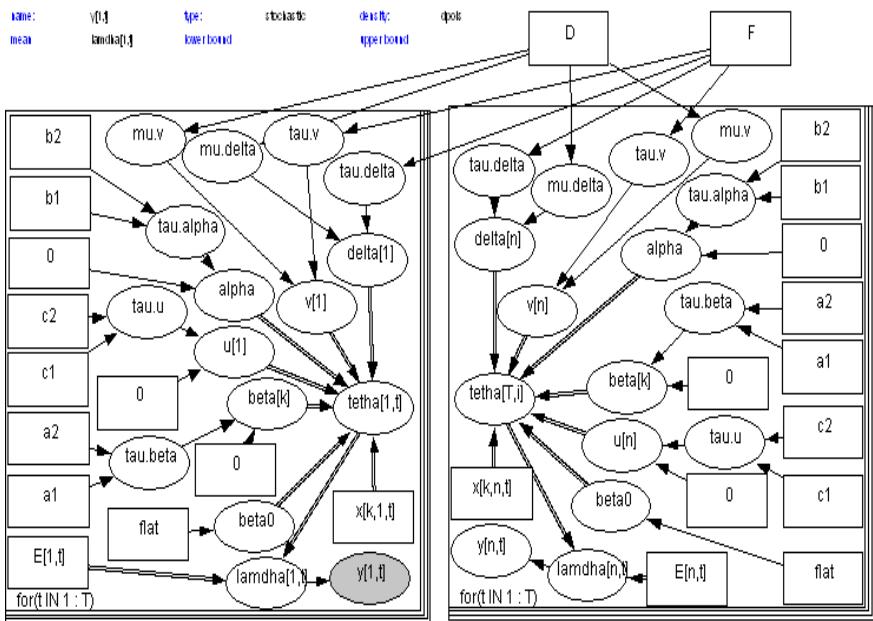
$$[\tau_\beta \cdot] \sim G \left(a_1 - \frac{1}{2}, \frac{\left(\beta_k^{(0)} \right)^2}{2 \left(\tau_\beta^{(0)} \right)^2} - \frac{\log(H_7)}{\tau_\beta^{(0)}} + a_2 \right), H_7 \text{ konstan}$$

- $\tau_u^{(m)}$ di-generate pada $[\tau_u \cdot]$, dimana

$$[\tau_u \cdot] \sim G \left(c_1 - \frac{31}{2}, \frac{\sum_{i=1}^{31} (u_i^{(0)})^2}{2 \left(\tau_u^{(0)} \right)^2} - \frac{\log(H_8)}{\tau_u^{(0)}} + c_2 \right), H_8 \text{ konstan}$$

- $\tau_v^{(m)}$ di-generate pada $[\tau_v | .]$, dimana
$$[\tau_v | .] \sim G \left(d_1 + \frac{31}{2}, d_2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{31} D_i \left(v_i^{(0)} \right)^2 - \rho \sum_{i=1}^{31} v_i^{(0)} \sum_{j \in \varepsilon(i)}^{31} v_j + \frac{\rho^2 \left(\sum_{j \in \varepsilon(i)}^{31} v_j \right)^2}{2D_i} - \frac{\log(H_9)}{\tau_v^{(0)}} \right), H_9 \text{ konstan}$$
- $\tau_\alpha^{(m)}$ di-generate pada $[\tau_\alpha | .]$, dimana
$$[\tau_\alpha | .] \sim G \left(b_1 - \frac{1}{2}, \frac{\left(\alpha^{(0)} \right)^2}{2 \left(\tau_\alpha^{(0)} \right)^2} - \frac{\log(H_{10})}{\tau_\alpha^{(0)}} + b_2 \right), H_{10} \text{ konstan}$$
- $\tau_\delta^{(m)}$ di-generate pada $[\tau_\delta | .]$, dimana
$$[\tau_\delta | .] \sim G \left(e_1 + \frac{31}{2}, e_2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{31} D_i \left(\delta_i^{(0)} \right)^2 - \rho \sum_{i=1}^{31} \delta_i^{(0)} \sum_{j \in \varepsilon(i)}^{31} \delta_j + \frac{\rho^2 \left(\sum_{j \in \varepsilon(i)}^{31} \delta_j \right)^2}{2D_i} - \frac{\log(H_{11})}{\tau_\delta^{(0)}} \right), H_{11} \text{ konstan}$$

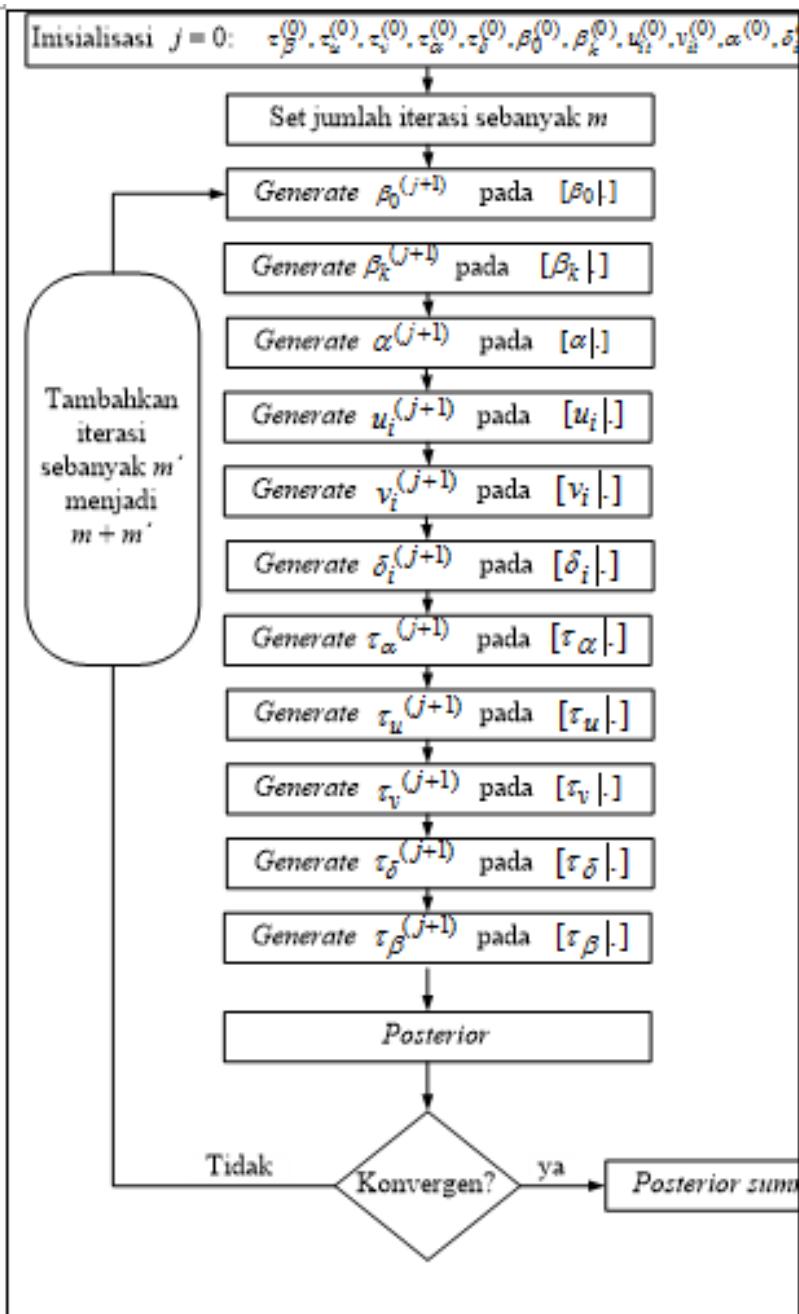
Lebih lanjut, *directed acyclid graph* (DAG) MBP2L spasio temporal yang digunakan untuk menyusun alur program pada WinBUGS (Gambar 5.2).



Gambar 5.2. DAG MBP2L spasio temporal, node lingkaran sebagai stokastik atau *logical*, node kotak sebagai konstanta, garis tunggal menyatakan hubungan *stokastik* (distribusi), garis ganda menyatakan hubungan *deterministic (logical)*,

$$D = \rho \sum_{j \in \varepsilon(i)}^n \frac{W_{ij} v_j}{D_i}, F = \frac{1}{\tau_v D_i}$$

DAG pada Gambar 5.2 bermanfaat untuk menyusun alur program (Gambar 5.3) dan kemudian digunakan untuk penyusunan makro program pada WinBUGS pada Gambar 5.3.



Gambar 5.3. Flowchart MBP2L spasio temporal

```

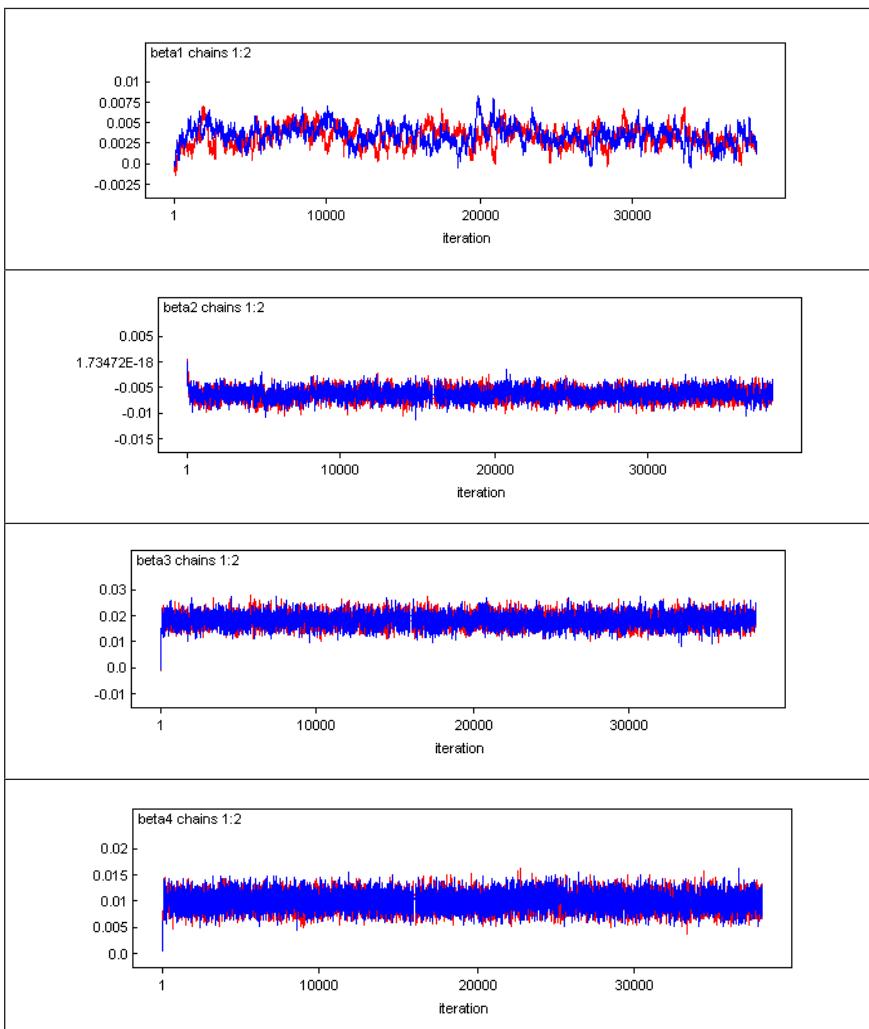
model { for (i in 1:kecamatan){for (t in 1:T){ y[i,t]~dpois(mu[i,t])
mu[i,t]<-E[i,t]*exp(beta0+beta1*X1[i,t]+beta2*X2[i,t]+beta3*X3[i,t]+beta4*X4[i,t]+u[i]
+v[i]+alpha*k[t]+delta[i]*k[t])
# X1=: kelembaban, X2=: temperatur, X3=: banyaknya hari hujan, X4=: kepadatan
penduduk
RR[i,t]<-exp(beta0+beta1*X1[i,t]+beta2*X2[i,t]+beta3*X3[i,t]+beta4*X4[i,t]+u[i]+v[i]+a
lpha*k[t]+delta[i]*k[t])}
# distribusi CAR prior untuk spatial correlated heterogeneity
v[1:kecamatan]~car.normal(adj[],weights[],num[],tau.v)
delta[1:kecamatan]~car.normal(adj[],weights[],num[],tau.delta)
# distribution prior untuk uncorrelated heterogeneity
for(i in 1:kecamatan){u[i]~dnorm(0,tau.u)}
beta0~dflat()
alpha~dnorm(0,tau.alpha)
beta1~dnorm(0,tau.beta)
beta2~dnorm(0,tau.beta)
beta3~dnorm(0,tau.beta)
beta4~dnorm(0,tau.beta)
# Distribution hyperprior
tau.alpha~dgamma(0.00005,0.5)
tau.beta~dgamma(0.0001,0.5)
tau.u~dgamma(0.0001,0.5)
tau.v~dgamma(0.0005,0.5)
tau.delta~dgamma(0.000015,0.5)}
Data
list(y=structure(.Data=c(...))
.
.
.
sumNumNeig=154,
adj = c(2,
.
.
.
22,21,30), num = c(1,4,7,4,7,7,5,4,5,7,8,6,3,5,8,4,8,5,3,5,4,6,8,4,4,6,2,3,4,4,3))
INITIAL DATA
list(beta0=0, alpha=0,beta1=0,beta2=0,beta3=0,beta4=0,
#tau.u=1,tau.v=1,tau.delta=1,tau.beta=1, tau.alpha=1
tau.u=1.01,tau.v=1.02,tau.delta=1.02,tau.beta=1.04, tau.alpha=1.02,
u=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0),
delta=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0),
v=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0))

```

Gambar 5.4. Makro program MBP2L spasio temporal

Didefinisikan β_1 sebagai parameter regresi untuk kelembaban, β_2 parameter regresi untuk temperatur, β_3 sebagai parameter regresi untuk banyaknya hari hujan, dan β_4 parameter regresi untuk kepadatan penduduk. Makro program pada WinBUGS (Gambar 5.4) diimplementasikan untuk meng-generate parameter-parameter MBP2L spasial temporal dan mencapai konvergensi pada 30.000 iterasi (Gambar 5.5). Terdapat beberapa metode untuk diagnosa konvergensi (Marin dan Robert, 2007), yaitu: (1) MC error yaitu semakin kecil nilai MC error semakin presisi nilai yang diperoleh; (2) *trace plot* yaitu jika grafik *trace plot* sudah berada pada zona yang sama selama proses iterasi maka proses iterasi sudah mencapai konvergensi; (3) evolusi *ergodic mean* yaitu memonitor variasi nilai mean jika nilai mean sudah stabil maka proses iterasi telah mencapai konvergensi, (4) monitoring konvergensi menggunakan *convergence diagnosis and output analysis* (CODA) (Dellaportas, dkk., 2002) dan *Bayesian output analysis* (BOA) (Brooks dan Gelman, 1998), (5) teknik *multiple-chain* (Eberley dan Carlin, 2000) yaitu membandingkan *trace plot* antara dua nilai awal yang berbeda, jika *trace plot* keduanya sudah berada pada zona yang sama maka konvergensi telah tercapai.

Namun pada penelitian ini menggunakan *trace plot*, evolusi *ergodic mean*, dan teknik *multiple chain* karena penggunaan ketiganya dapat diterapkan pada satu grafik. Histori proses iterasi (*trace plot*) pada Gambar 5.5 sudah berada pada zona yang sama atau evolusi *ergodic mean* untuk β_1 , β_2 , β_3 , dan β_4 sudah tumpang tindih jika diambil nilai awal yang berbeda (*multiple-chain*).

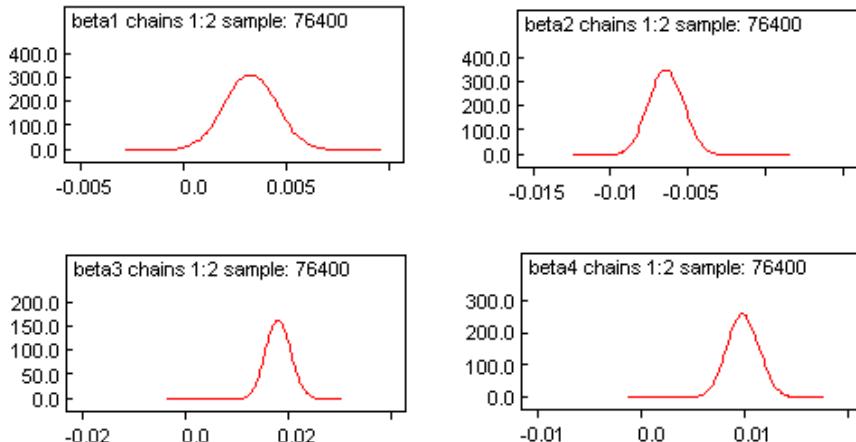


Gambar 5.5. Histori proses iterasi, sebanyak 30.000 kali iterasi

Carlin dan Louis (2000) dan Congdon (2007) menjelaskan bahwa estimasi titik digunakan untuk menentukan nilai mean, median, dan mode setiap parameter model. Ada tiga estimasi titik yang sering digunakan pada Bayesian MCMC (Cowles, 2004) yaitu

- 1) *posterior mean*, $\hat{\theta} = E(\theta|y)$;
- 2) *posterior median*, $\int_{-\infty}^{\hat{\theta}} p(\theta|y)d\theta$;

dan 3) *posterior mode*, $p(\hat{\theta}|y) = \sup_{\theta} p(\theta|y)$. Jika *posterior* unimodal simetris (misalnya distribusi normal), maka *posterior mean*, *median*, dan *mode* mempunyai nilai yang sama (Gamerman dan Lopes, 2006). Jika *posterior* multimodal (atau distribusi non normal), maka untuk mendapatkan *mean*, *median*, dan *mode* cukup rumit karena melibatkan integral dan *rootfinding* (Gelman, dkk., 2004). Namun demikian, MCMC dapat mengatasi kerumitan tersebut (Robert dan Casella, 2005). Densitas setiap parameter regresi disajikan pada Gambar 5.6 dan *posterior* serta *median* disajikan pada Tabel 5.2.

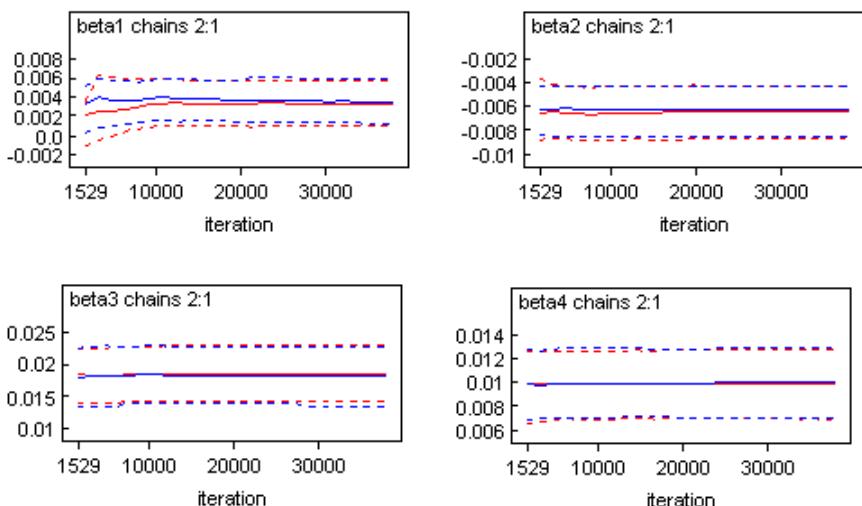


Gambar 5.6. Densitas setiap parameter regresi, diiterasi sebanyak 30.000 kali

Estimasi interval digunakan untuk menentukan *quantile* parameter MBP2L spasial temporal (Gambar 5.7). *Quantile* $\alpha/2$ dan $(1-\alpha/2)$ dari *posterior* $p(\theta|y)$ pada suatu titik q_L dan q_U , menurut Elliott, dkk., (2000) didefinisikan:

$$\int_{-\infty}^{q_L} p(\theta|y)d\theta = \alpha/2 \text{ dan } \int_{q_U}^{\infty} p(\theta|y)d\theta = 1 - \alpha/2.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $p(q_L|y < \theta < q_U|y) = 1 - \alpha$, sehingga $\theta \subset C = (q_L, q_U)$ adalah $100(1 - \alpha)\%$ merupakan interval *credible* untuk θ (atau interval *confidence* Bayesian). Jika *posterior* unimodal simetris, maka interval *equal tail* simetris dengan mode (Gelman dan Hill, 2007), dengan nilai optimal berada pada himpunan C yang memenuhi $1 - \alpha \leq p(C|y) = \int_C p(\theta|y)d\theta$.



Gambar 5.7. Quantile setiap parameter model, diiterasi sebanyak 30.000 kali

Terdapat dua metode untuk menentukan MC error pada WinBUGS yaitu metode *bacth mean* dan *window estimator*. Misalkan dipartisi sampel menjadi K *batches* (biasanya $K=30$ atau $K=50$) dan ukuran sampel setiap *bacth* didefinisikan $v = m'/K$, m' merupakan

banyaknya iterasi yang dibutuhkan untuk mencapai konvergensi (Best dan Elliott, 2004) sehingga, mean untuk setiap *batch*, didefinisikan:

$$\overline{G(\theta)_b} = \frac{1}{v} \sum_{m=(b-1)v+1}^{m'} G(\theta^{(m)}) ,$$

dan mean seluruh sampel, didefinisikan:

$$\begin{aligned}\overline{G(\theta)} &= \frac{1}{m'} \sum_{m=1}^{m'} G(\theta^{(m)}) \\ &= \frac{1}{K} \sum_{b=1}^K \overline{G(\theta)_b}.\end{aligned}$$

Oleh karena itu, MC error didefinisikan:

$$\text{MCerror}[G(\theta)] = \sqrt{\frac{1}{K(K-1)} \sum_{b=1}^K \left(\overline{G(\theta)_b} - \overline{G(\theta)} \right)^2}.$$

Window estimator disusun berdasarkan ekspresi variansi sampel *autocorrelation* (Gamerman dan Lopes, 2006), yang didefinisikan:

$$\text{MCerror}[G(\theta)] = \frac{SD[G(\theta)]}{\sqrt{m'}} \sqrt{1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\rho}_k(G(\theta))},$$

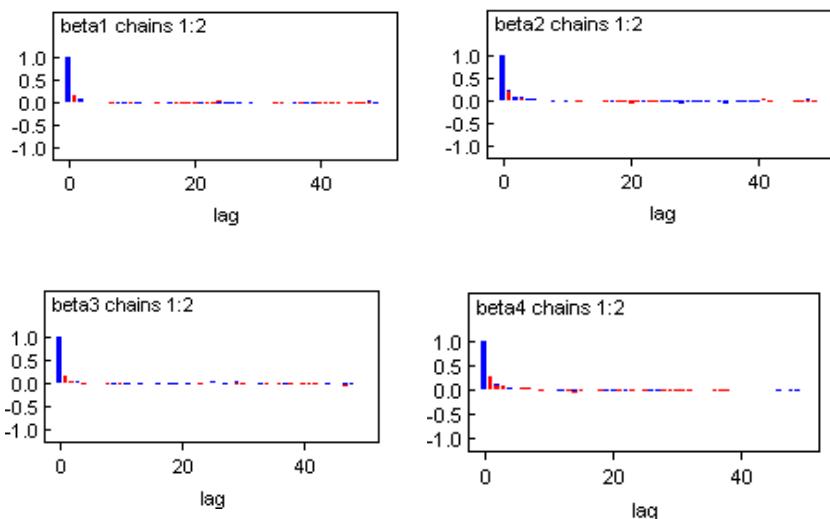
dimana $\hat{\rho}_k(G(\theta))$ merupakan estimasi *autocorrelation* pada lag k yaitu korelasi antara parameter $G(\theta^m)$ dan $G(\theta^{m+k})$. Secara praktek, *autocorrelation* mendekati nilai nol jika nilai k cukup besar (atau $k \gg$), sehingga dapat diidentifikasi *window w* pada *autocorrelation* yang rendah (misalnya $w < 0,1$) (Gelman, dkk., 2004). Selanjutnya, MC error didefinisikan lagi menjadi:

$$\text{MCerror}[G(\theta)] = \frac{\text{SD}[G(\theta)]}{\sqrt{m'}} \sqrt{1 + 2 \sum_{k=1}^w \hat{\rho}_k(G(\theta))},$$

dan *efektive sample size*, didefinisikan:

$$ESS = \frac{N}{\sqrt{1 + 2 \sum_{k=1}^w \hat{\rho}_k(G(\theta))}}.$$

Gambar 5.8 merupakan hasil MC error menggunakan *window estimator* merupakan autocorrelation hasil simulasi pada WinBUGS.



Gambar 5.8. Autocorrelation setiap parameter model

Posterior summary iterasi 30.000 kali setiap parameter regresi untuk MBP2L spasio temporal disajikan pada Tabel 5.2.

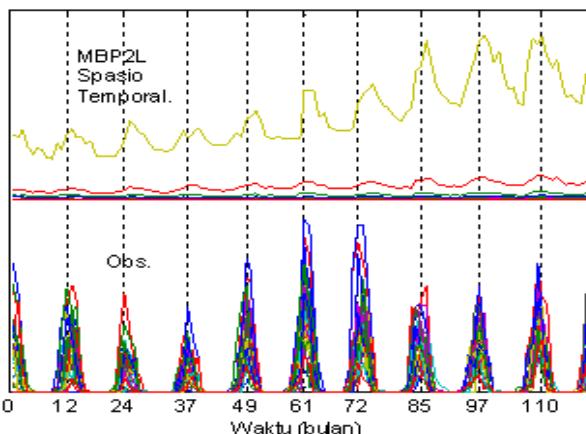
Tabel 5.2. Hasil estimasi parameter regresi MPB2L spasio temporal

Node	Mean	SD	MC error	2,50%	Median	97,50%
beta0	-8.835	1.431	0.1207	-9.73	-9.372	0,466
beta1	0,003341	0,001213	5,30E-02	9,38E-01	0,003333	0,005726
beta2	-0,006366	0,001074	2,38E-02	-0,00846	-0,006376	-0,004255
beta3	0,0183	0,00234	3,60E-02	0,01383	0,01824	0,02292
beta4	0,00995	0,00147	1,83E-02	0,0071	0,00993	0,0128

Berdasarkan *posterior summary* hasil estimasi (Tabel 5.2), maka langkah selanjutnya adalah menghitung resiko relatif (RR) kasus DBD per kecamatan perbulan di kota Surabaya menggunakan:

$$RR_{it} = \exp \left[\left(\beta_0 + \sum_{k=1}^4 x_{kit}^T \beta_k + u_i + v_i + \alpha t_z + \delta_i t_z \right) \right], i = 1, \dots, 31, t = 1, \dots, 120,$$

dimana x_{kit} merupakan faktor lingkungan sebagai covariate yaitu kelembaban, temperatur, banyaknya hari hujan, dan kepadatan penduduk. Visualisasi resiko relatif kasus dibandingkan dengan data observasi disajikan pada Gambar 5.9.



Gambar 5.9. Visulasasi MBP2L spasio temporal dibandingkan dengan data observasi

5.2 Perluasan MBP2L Spasio Temporal

Perluasan MBP2L spasio temporal difokuskan pada modifikasi efek random *uncorrelated* dan *correlated heterogeneity* pada (2.12) ditinjau secara spasio temporal. Prosedur analitik untuk mendapatkan *full conditional distribution* untuk perluasan MBP2L spasio temporal menggunakan prinsip dan asumsi yang sama dengan MBP2L spasio temporal. *Full conditional distribution* untuk perluasan MBP2L spasio temporal dan bersifat *closed form*.

Full conditional distribution perluasan MBP2L spasio temporal digunakan untuk estimasi parameter model menggunakan prosedur Gibbs sampler dan dilakukan per blok sebanyak m kali iterasi:

- $\beta_0^{(m)}$ di-*generate* pada $[\beta_0 | \cdot]$, dimana

$$[\beta_0 | \cdot] \propto \exp \left[\sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} \left(y_{it} \beta_0^{(0)} - e_{it} \exp(\beta_0^{(0)}) \right) + \log \left(\left[\prod_{t=1}^{120} \prod_{i=1}^{31} [e_{it}]^{y_{it}} \right] H_{12} \right) \right], H_{12} \text{ konstan}$$

- $\beta_k^{(m)}$ di-*generate* pada $[\beta_k | \cdot], k = 1, 2, 3, 4$, dimana

$$[\beta_k | \cdot] \propto N \left(\frac{2\tau_\beta^{(0)} A_{21}}{A_{22}}, \tau_\beta^{(0)} H_{13} \left[\prod_{t=1}^{120} \prod_{i=1}^{31} [e_{it}]^{y_{it}} \right] \exp \left(\sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} e_{it} - \left(\frac{2\tau_\beta^{(0)} A_{21}}{A_{22}} \right)^2 \right) \right),$$

$$A_{21} = \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} \left(y_{it} - e_{it} \sum_{k=1}^4 x_{kit}^T \right), A_{22} = \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} \left(1 + \tau_\beta^{(0)} e_{it} \sum_{k=1}^4 (x_{kit}^T)^2 \right), H_{13} \text{ konstan}$$

- $u_{it}^{(m)}$ di-*generate* pada $[u_{it} | \cdot], t = 1, \dots, 120, i = 1, \dots, 31$, dimana

$$[u_{it} | \cdot] \sim N \left(\frac{2\tau_u^{(0)} B_{21}}{B_{22}}, (\tau_u^{(0)})^{31 \times 120} H_{14} \exp \left[\sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} e_{it} - \left(\frac{2\tau_u^{(0)} B_{21}}{B_{22}} \right)^2 \right] \right),$$

$$B_{21} = \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} (y_{it} - e_{it}), B_{22} = \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} \left(1 + \tau_u^{(0)} e_{it} \right), H_{14} \text{ konstan}$$

- $v_{it}^{(m)}$ di-generate pada $[v_{it}|.]$, $t = 1, \dots, 120, i = 1, \dots, 31$, dimana

$$[v_{it}|.] \sim N\left(\frac{2\tau_v^{(0)}C_{21}}{C_{22}}, \left[\tau_v^{(0)}D_i\right]^{\frac{31 \times 120}{2}} H_{15} \exp\left[\sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} e_{it} - \left(\frac{2\tau_v^{(0)}C_{21}}{C_{22}}\right)^2\right]\right),$$

$$C_{21} = \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} \left(y_{it} - e_{it} + \rho \tau_v^{(0)} \sum_{j \in \varepsilon(i)} v_j\right), C_{22} = \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} \left(\left(\tau_v^{(0)}\right)^2 D_i + \tau_v^{(0)}\right), H_{15} \text{ konstan}$$

- $\alpha^{(m)}$ di-generate pada $[\alpha|.]$, dimana

$$[\alpha|.] \sim N\left(\frac{2\tau_\alpha^{(0)}F_{21}}{F_{22}}, \tau_\alpha^{(0)}H_{16} \exp\left[\prod_{t=1}^{120} \prod_{i=1}^{31} [e_{it}]^{y_{it}} - \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} e_{it} - \left(\frac{2\tau_\alpha^{(0)}F_{21}}{F_{22}}\right)^2\right]\right),$$

$$F_{21} = \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} (y_{it} - e_{it}), F_{22} = \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} (e_{it} \tau_\alpha^{(0)} + 1), H_{16} \text{ konstan}$$

- $\delta_i^{(m)}$ di-generate pada $[\delta_i|.]$, $i = 1, \dots, 31$, dimana

$$[\delta_i|.] \sim N\left(\frac{2\tau_\delta^{(0)}G_{21}}{G_{22}}, \left[\frac{1}{\tau_\delta^{(0)}D_i}\right]^{\frac{31}{2}} H_{17} \exp\left[\prod_{t=1}^{120} \prod_{i=1}^{31} [e_{it}]^{y_{it}} - \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} e_{it} + \left(\frac{\sqrt{\tau_\delta^{(0)}} \rho \sum_{j \in \varepsilon(i)} \delta_j}{\sqrt{2D_i}}\right)^2 - \left(\frac{2\tau_\delta^{(0)}G_{21}}{G_{22}}\right)^2\right]\right),$$

$$G_{21} = \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} \left(y_{it} - e_{it} + \tau_\delta^{(0)} \rho \sum_{j \in \varepsilon(i)} \delta_j\right), G_{22} = \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} \left(\tau_\delta^{(0)} e_{it} - \left(\tau_\delta^{(0)}\right)^2 D_i\right), H_{17} \text{ konstan}$$

- $\tau_\beta^{(m)}$ di-generate pada $[\tau_\beta|.]$, dimana

$$[\tau_\beta|.] \sim G\left(a_1 - \frac{1}{2}, \frac{{\beta_k}^2}{2{\tau_\beta}^2} - \frac{\log(H_{18})}{\tau_\beta} + a_2\right), H_{18} \text{ konstan}$$

- $\tau_u^{(m)}$ di-*generate* pada $[\tau_u | \cdot]$, dimana

$$[\tau_u | \cdot] \propto G \left(c_1 - \frac{31 \times 120}{2}, c_2 + \frac{\sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} (u_{it}^{(0)})^2}{2(\tau_u^{(0)})^2} - \frac{\log(H_{19})}{\tau_\alpha^{(0)}} \right), H_{19} \text{ konstan}$$

- $\tau_v^{(m)}$ di-*generate* pada $[\tau_v | \cdot]$, dimana

$$[\tau_v | \cdot] \propto G \left(d_1 + \frac{31 \times 120}{2}, d_2 + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{120} \sum_{i=1}^{31} D_t (v_{it}^{(0)})^2 - \rho \sum_{t=1}^{120} \left(\sum_{i=1}^{31} v_{it}^{(0)} \sum_{j \in \mathcal{E}(i)} v_j \right) + \frac{\rho^2 \left(\sum_{t=1}^{120} \sum_{j \in \mathcal{E}(i)} v_j \right)^2}{2D_t} - \frac{\log(H_{20})}{\tau_\alpha^{(0)}} \right), H_{20} \text{ konstan}$$

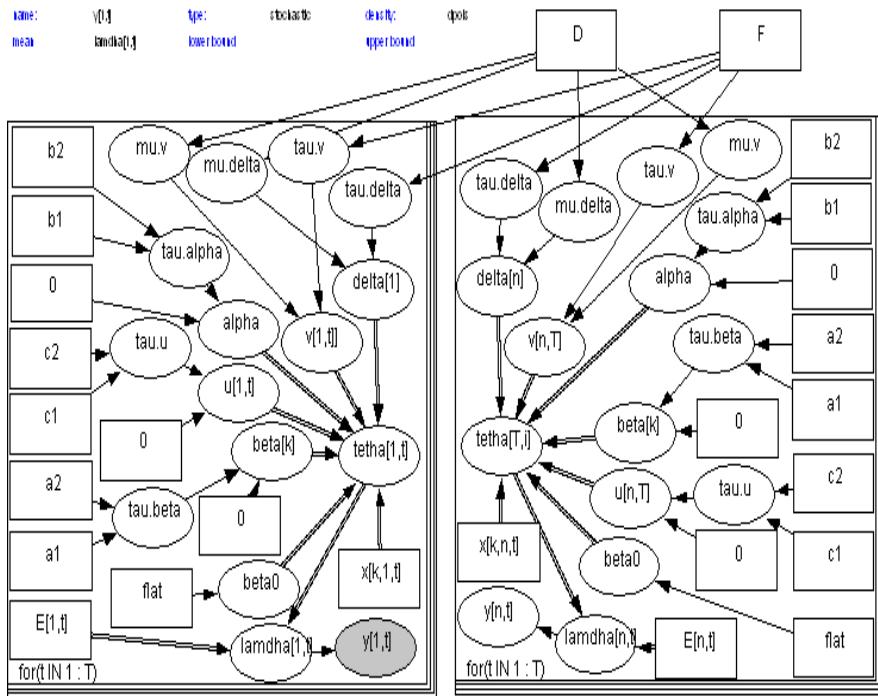
- $\tau_\alpha^{(m)}$ di-*generate* pada $[\tau_\alpha | \cdot]$, dimana

$$[\tau_\alpha | \cdot] \sim G \left(b_1 - \frac{1}{2}, \frac{(\alpha^{(0)})^2}{2(\tau_\alpha^{(0)})^2} - \frac{\log(H_{21})}{\tau_\alpha^{(0)}} + b_2 \right), H_{21} \text{ konstan}$$

- $\tau_\delta^{(m)}$ di-*generate* pada $[\tau_\delta | \cdot]$, dimana

$$[\tau_\delta | \cdot] \sim G \left(e_1 + \frac{31}{2}, e_2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{31} D_i (\delta_i^{(0)})^2 - \rho \sum_{i=1}^{31} \delta_i^{(0)} \sum_{j \in \mathcal{E}(i)} \delta_j + \frac{\rho^2 \left(\sum_{j \in \mathcal{E}(i)} \delta_j \right)^2}{2D_i} - \frac{\log(H_{22})}{\tau_\alpha^{(0)}} \right), H_{22} \text{ konstan}$$

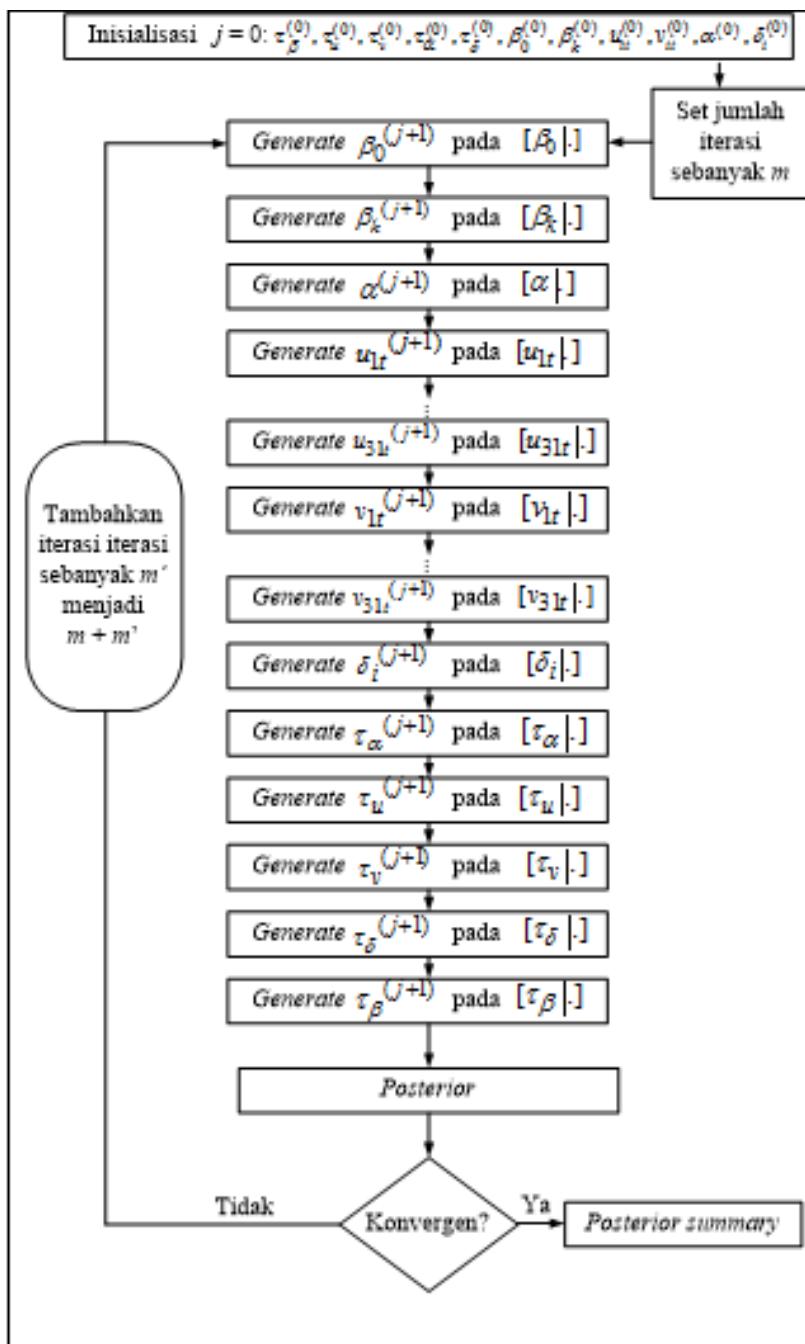
Sulitnya mendapatkan estimasi parameter untuk perluasan MBP2L spasio temporal dari prosedur analitiknya, sehingga proses komputasi menjadi pilihan untuk estimasi. Lebih lanjut, DAG perluasan MBP2L spasio temporal yang digunakan untuk menyusun alur program pada WinBUGS (Gambar 5.10).



Gambar 5.10. DAG perluasan MBP2L spasio temporal, *node* lingkaran sebagai stokastik atau *logical*, *node* kotak sebagai konstanta, garis tunggal menyatakan hubungan *stokastik* (distribusi), garis ganda menyatakan hubungan *deterministic* (*logical*),

$$D = \rho \sum_{j \in \mathcal{E}(i)}^n \frac{W_{ij} v_{jt}}{D_i}, F = \frac{1}{\tau_v D_i}$$

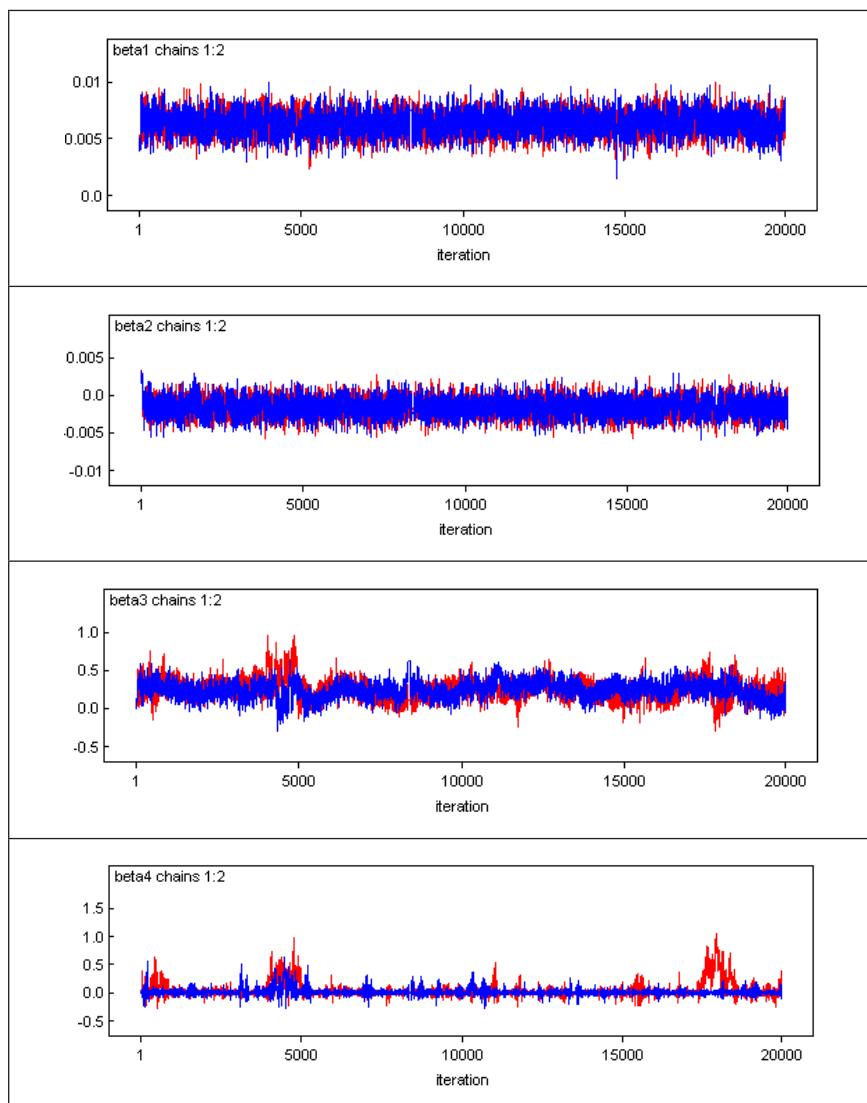
Berdasarkan DAG (Gambar 5.10) dapat disusun alur program pada Gambar 5.11 dan makro program pad WinBUGS (Gambar 5.12).



Gambar 5.11. Flowchart perluasan MBP2L spatio temporal

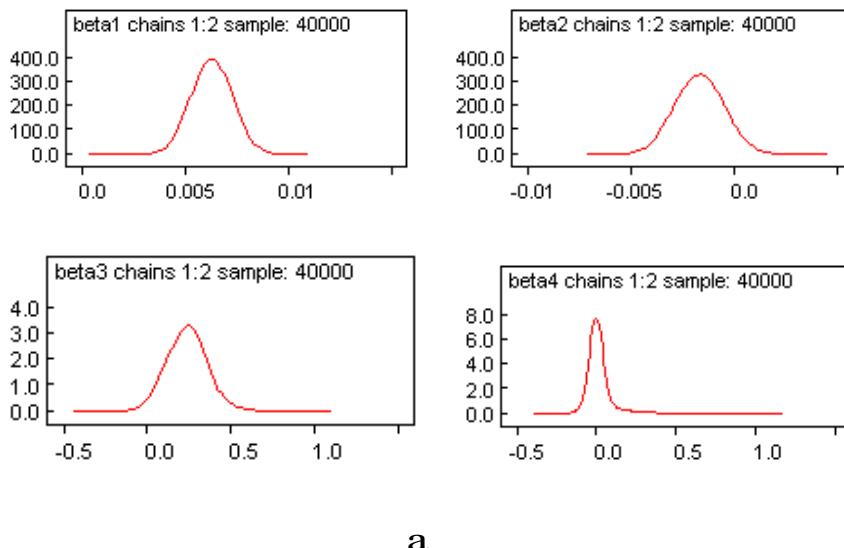
Gambar 5.12. Makro program perluasan MBP2L spasio temporal

Histori proses iterasi (*trace plot*) sebanyak 20.000 kali sudah mencapai konvergensi karena sudah berada pada zona yang sama atau evolusi *ergodig* mean untuk β_1 , β_2 , β_3 , dan β_4 sudah tumpang tindih jika diambil nilai awal yang berbeda (*multiple-chain*) (Gambar 5.13).

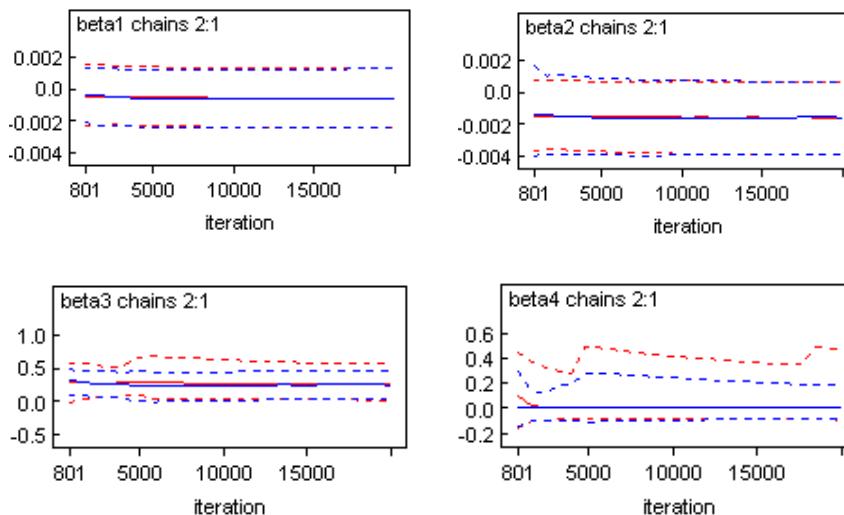


Gambar 5.13. Histori proses iterasi parameter model sebanyak 20.000 kali iterasi

Densitas serta *quantile* setiap parameter regresi perluasan MBP2L spasio temporal disajikan pada Gambar 5.14 dan *posterior mean* serta median disajikan pada Tabel 5.3.



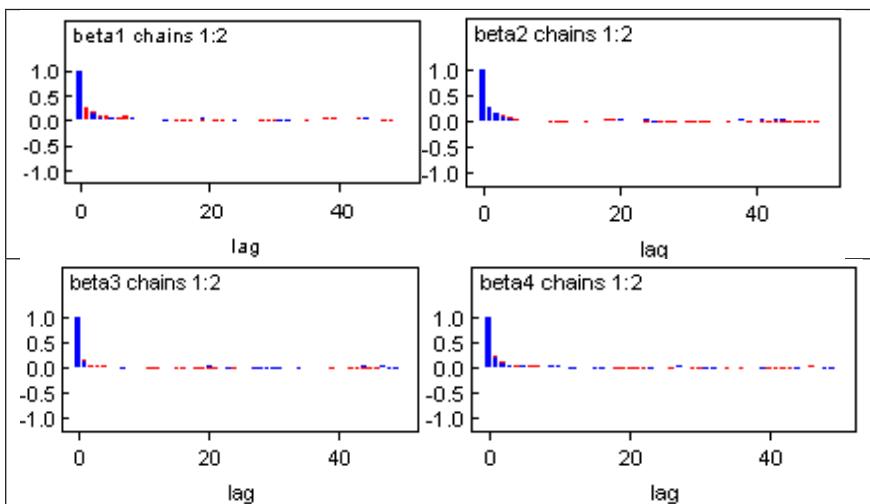
a



b

Gambar 5.14. Nilai-nilai parameter regresi model setelah iterasi 20.000 kali,(a) densitas, (b) *quantile*

Sementara itu, *autocorrelation* untuk setiap parameter regresi model disajikan pada Gambar 5.15.



Gambar 5.15. Grafik *autocorrelation* setiap parameter model yang berkaitan dengan covariate

Posterior summary hasil estimasi parameter regresi untuk perluasan MBP2L spasio temporal diuraikan pada Tabel 5.3.

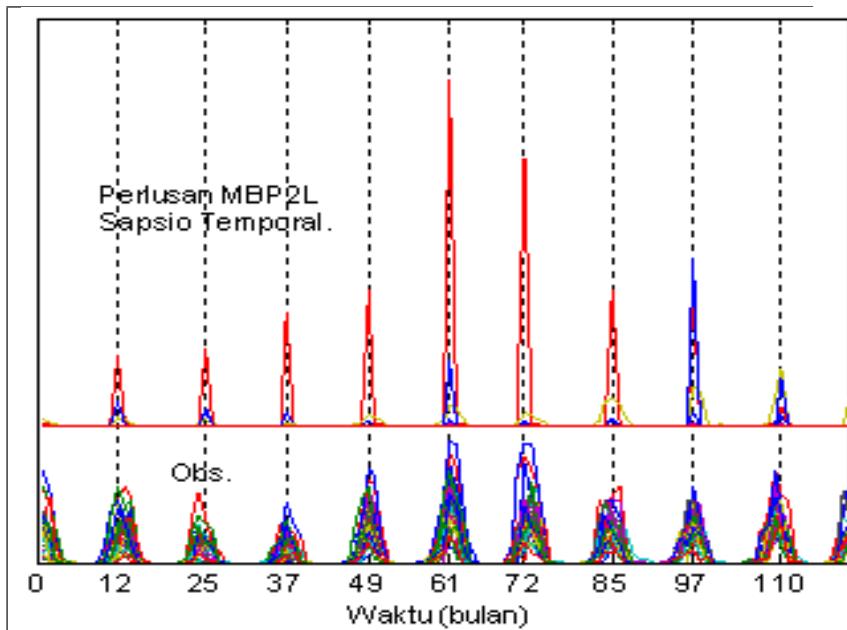
Tabel 5.3. Hasil estimasi parameter model setelah 20.000 kali iterasi

Node	Mean	SD	MC error	2.5%	Median	97.5%
beta0	-8.418	0.9551	0.08035	-9.284	-8.587	-5.088
beta1	0,006348	9,47E-01	1,63E-02	0,00452	0,006349	0,008207
beta2	-0,0016	0,001146	1,74E-02	-0,0038	-0,0016	6,52E-01
beta3	0,2454	0,1243	0,004984	0,00961	0,2444	0,5068
beta4	0,02919	0,1052	0,004968	-0,0771	0,00385	0,364

Berdasarkan hasil estimasi parameter perluasan MBP2L spasio temporal pada Tabel 5.3, selanjutnya dihitung resiko relatif kasus DBD per kecamatan dan perbulan di Kota Surabaya menggunakan:

$$RR_{it} = \exp \left[\left(\beta_0 + \sum_{k=1}^4 x_{kit}^T \beta_k + u_{it} + v_{it} + \alpha t_z + \delta_i t_z \right) \right], i=1,\dots,31, t=1,\dots,120$$

Visualisasi resiko relatif selama periode tahun 2001-2010 perbulan disajikan pada Gambar 5.16.



Gambar 5.16. Visualisasi resiko relatif perluasan MBP2L spasio temporal dibandingkan dengan observasi

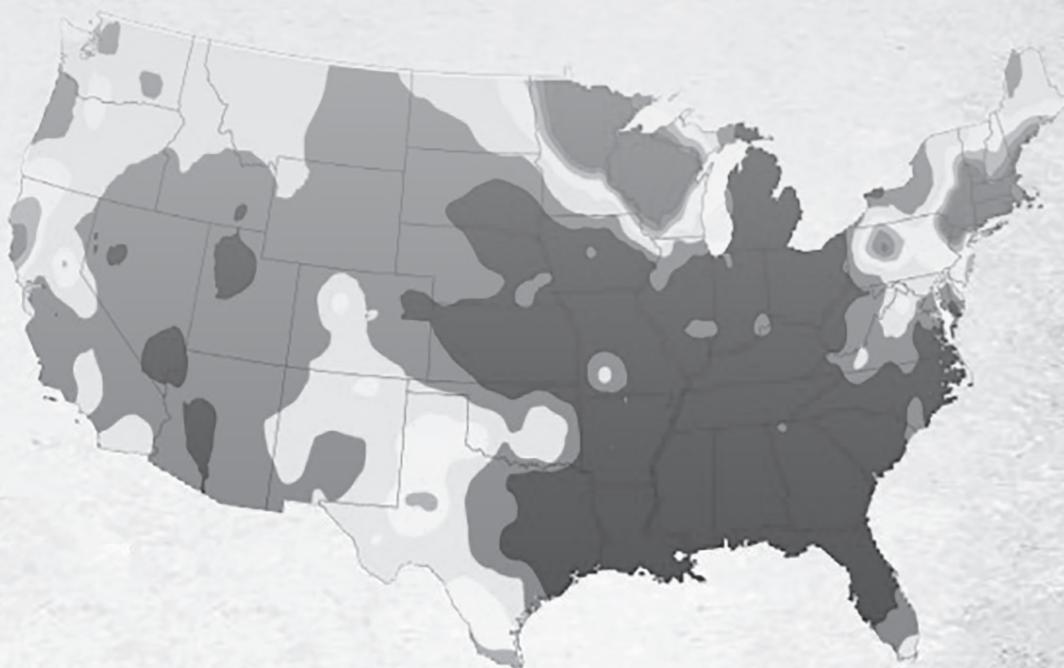
Berdasarkan visualisasi resiko relatif kasus DBD di kota Surabaya selama 120 bulan MBP2L spasio temporal menunjukkan MBP2L spasio temporal tidak menunjukkan kemiripan pola dengan data observasi. Dipihak lain, visualisasi resiko relatif kasus DBD di kota

Surabaya untuk perluasan MBP2L spasio temporal menunjukkan kemiripan pola dengan data observasi. Menurut visualisasi perluasan MBP2L spasio temporal, menunjukkan bahwa periode kasus tertinggi DBD di kota Surabaya berada pada bulan 12 (atau Desember 2001), bulan 25 (atau Januari 2003), bulan 37 (atau Januari 2004), bulan 49 (atau Januari 2005), bulan 61 (atau Januari 2006), bulan 72 (atau Desember 2006), bulan 85 (atau Januari 2008), bulan 97 (atau Januari 2009), dan bulan 110 (atau Februari 2010).

Sebelum menganalisis resiko relatif kasus DBD, maka terlebih dahulu dilakukan analisis pemilihan model yaitu memilih model terbaik antara MBP2L spasio temporal dan perluasan MBP2L spasio temporal. Memilih model terbaik digunakan metode *deviance information criteria* (DIC) dan uji hipotesis menggunakan Bayes faktor. Lebih jauh, untuk lebih mempertegas kesimpulan DIC dan Bayes factor juga ditinjau MC error antara kedua model. MC error terkecil merupakan model terbaik.

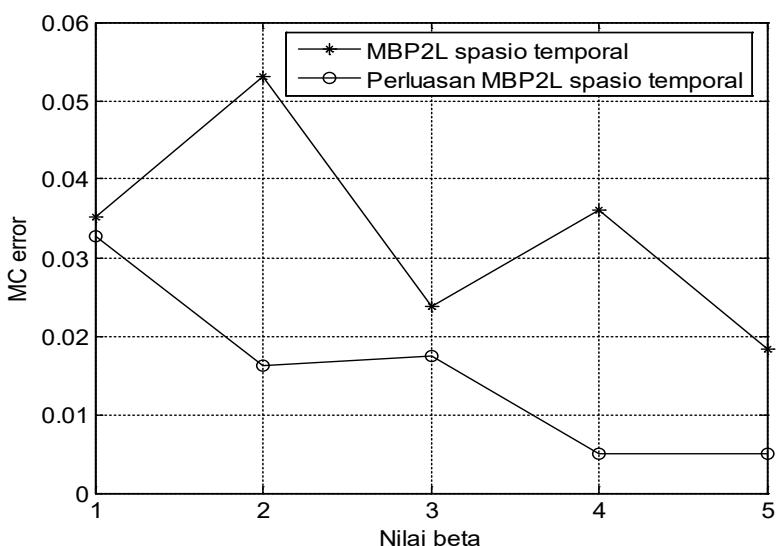
Catatan:

KINERJA MODEL



6.1 Performace Model

Performance model yang dimaksudkan adalah menguji kebaikan model dan menyeleksi model menggunakan beberapa pendekatan yaitu visual kesamaan pola dengan data observasi, Bayes factor, DIC, dan MC error. Berdasarkan visual MBP2L spasio temporal dan perluasan MBP2L spasio temporal, terlihat bahwa MBP2L spasio temporal tidak mempunyai kemiripan pola dengan data observasi, sedangkan perluasan MBP2L spasio temporal mempunyai kemiripan pola dengan data observasi. Disamping itu, visualisasi MC error antara MBP2L spasio temporal dan perluasannya berdasarkan *posterior summary*, menunjukkan bahwa MC error terkecil berada pada perluasan MBP2L spasio temporal (Gambar 6.1). Hal ini menunjukkan bahwa perluasan MBP2L spasio temporal memiliki performance baik untuk menganalisis resiko relative kasus DBD. Untuk mempertegas kesimpulan tersebut, lebih lanjut dilakukan uji menggunakan Bayes factor dan DIC.



Gambar 6.1. Perbandingan MC error antara MBP2L spasio temporal dan perluasan MBP2L spasio temporal

Misalkan MBP2L spasio temporal sebagai model m_1 dan perluasan MBP2L spasio temporal sebagai model m_2 , maka pendekatan Bayes factor (BF) dengan membandingkan *posterior* mean parameter regresi β_1 , β_2 , β_3 , dan β_4 antara model m_1 dan m_2 , dimana

$$BF_{12} = \frac{p(m_1 = \{\beta_{1(m_1)}, \beta_{2(m_1)}, \beta_{3(m_1)}, \beta_{4(m_1)}\} | y)}{p(m_2 = \{\beta_{1(m_2)}, \beta_{2(m_2)}, \beta_{3(m_2)}, \beta_{4(m_2)}\} | y)}.$$

Kriteria pemilihan model menggunakan BF telah diuraikan oleh Congdon (2009), sementara itu DIC menurut Spiegelhalter dkk., (2002), dapat dimodifikasi menjadi:

$$\begin{aligned} DIC(m) &= \min \left\{ 2 \overline{D(\theta_m, m)} - D(\bar{\theta}_m, m) \right\} \\ &= \min \left\{ 2 p_m + 2D(\bar{\theta}_m, m) - D(\bar{\theta}_m, m) \right\} \\ &= \min \left\{ 2 p_m + D(\bar{\theta}_m, m) \right\} \\ &= \min \left\{ -2 \log(y | \bar{\theta}_m, m) + 2 p_m \right\}. \end{aligned}$$

Tabel 6.1 menyajikan hasil analisisi BF dan perhitungan DIC untuk MBP2L dan perluasan MBP2L spasio temporal. Nilai DIC untuk MBP2L spasio temporal diperoleh 604.5411642, sedangkan untuk perluasan MBP2L spasio temporal adalah 394.2618. Hal ini menunjukkan bahwa perluasan MBP2L spasio temporal merupakan model terbaik karena memiliki DIC terkecil. Lebih lanjut, jika menggunakan Bayes faktor nilai $BF_{12} < 1$ dan $2\log(BF_{12}) < 0$, dimana MBP2L spasio temporal sebagai model 1 dan perluasan MBP2L spasio temporal sebagai model 2. Menunjukkan bahwa Bayes faktor menerima model 2 yaitu perluasan MBP2L spasio temporal sebagai model yang baik. Berdasarkan visual kemiripan pola, DIC, Bayes factor, dan MC error semuanya menerima model 2 (perluasan MBP2L spasio temporal) sebagai model terbaik,

sehingga pembahasan untuk menganalisis resiko relatif kasus DBD di kota Surabaya menggunakan perluasan MBP2L spasio temporal.

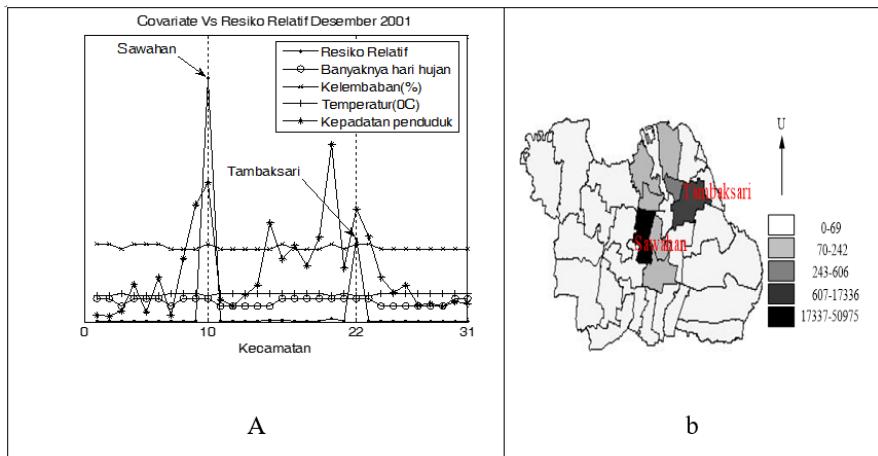
Tabel 6.1. Nilai Bayes factor dan DIC untuk MBP2L dan perluasan MBP2L spasio temporal

Node	MBP2L spasio temporal (Model 1)		Perluasan MBP2L spasio temporal (Model 2)		BF12	2log(BF12)
	Posterior mean	log posterior mean	Posterior mean	log posterior mean		
beta0	-8,835	-	-8,418	-	-	-
beta1	0,003341	-2,47612	0,00635	-2,1974	0,75672	-0,24213
beta2	-0,006366	-	-0,0016	-	-	-
beta3	0,0183	-1,73755	0,2454	-0,6101	0,32387	-0,97927
beta4	0,00995	-2,00218	0,02919	-1,5348	0,62662	-0,40599
Min dev.	594,5411642		384,2618			
DIC	604,5411642		394,2618			

6.2 Analisis Resiko Relatif Kasus DBD

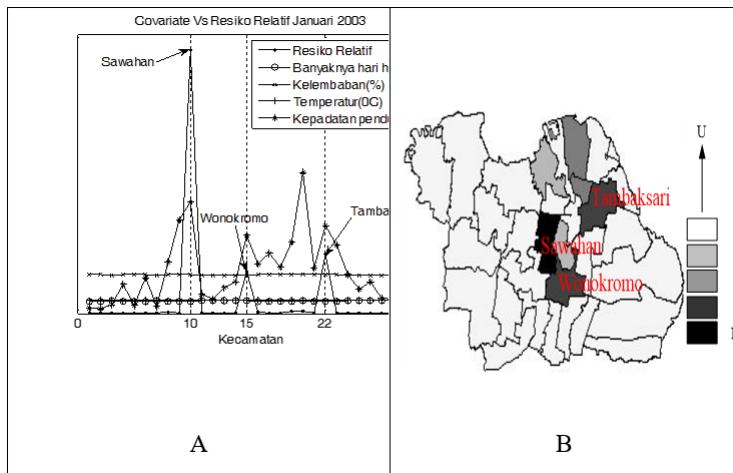
Bagian ini menganalisis resiko relatif kasus DBD perkecamatan perbulan di kota Surabaya menggunakan perluasan MBP2L spasio temporal sebagai model terbaik. Berdasarkan *posterior summary* dan visualisasinya mengindikasikan bahwa kasus tertinggi DBD di kota Surabaya selama periode tahun 2001-2010 berada pada Desember 2001, Januari 2003, Januari 2004, Januari 2005, Januari 2006, Desember 2006, Januari 2008, Januari 2009, dan Februari 2010. Setiap periode kasus tertinggi tersebut, diuraikan secara terpisah untuk mengetahui lokasi tertinggi dan covariate yang mempengaruhi kasus DBD.

Resiko kasus DBD bulan Desember 2001, menunjukkan bahwa kecamatan Sawahan dan Tambaksari merupakan daerah rawan DBD di kota Surabaya, hal ini disajikan pada Gambar 6.2a serta pemetaannya menggunakan *ArcView 3.3* pada Gambar 6.2b.



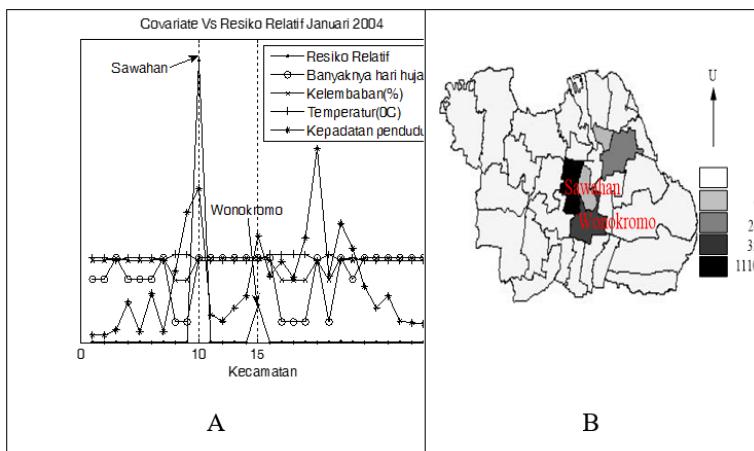
Gambar 6.2. Kasus DBD Desember 2001, (a) Resiko relatif kasus DBD kota Surabaya v.s covariate, (b) peta resiko kasus DBD

Januari 2003 resiko kasus DBD tertinggi di Kota Surabaya berada pada kecamatan Sawahan, Tambaksari, dan Wonokromo (Gambar 6.3a). Terdapat perluasan lokasi kasus DBD jika dibandingkan Desember 2001. Berdasarkan visualisasi menggunakan *ArcView 3.3* yang disajikan pada Gambar 6.3b, menunjukkan bahwa kecamatan Sawahan dapat menginvasi secara langsung kecamatan Wonokromo karena keduanya berbatasan langsung. Dengan kata lain, kasus DBD di kecamatan Sawahan dapat mempengaruhi kecamatan di sekitarnya seperti kecamatan Wonokromo.



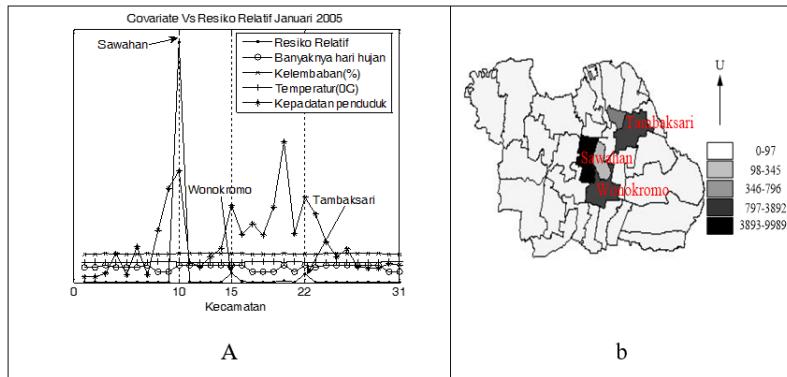
Gambar 6.3. Kasus DBD Januari 2003, (a) Resiko relatif kasus DBD kota Surabaya v.s covariate, (b) peta resiko kasus DBD

Sementara itu, Januari 2004 kasus DBD tertinggi di kota Surabaya berada pada kecamatan Sawahan dan Wonokromo (Gambar 6.4a) dan visualisasi dalam bentuk peta disajikan pada Gambar 6.4b. Hal mengindikasikan bahwa kecamatan Sawahan cukup memberikan kontribusi peningkatan kasus di kecamatan Wonokromo.



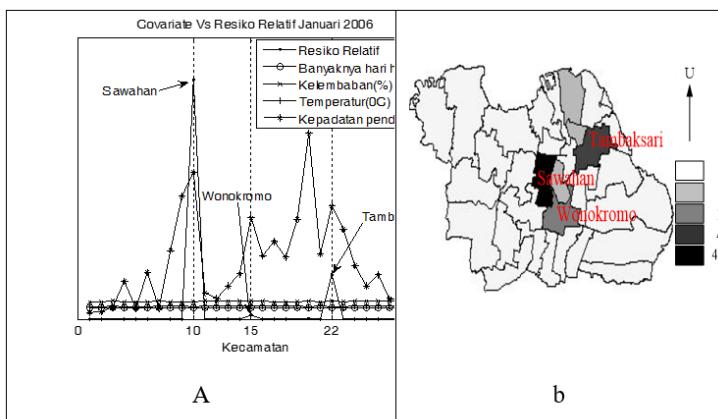
Gambar 6.4. Kasus DBD Januari 2004, (a) Resiko relatif kasus DBD kota Surabaya v.s covariate, (b) peta resiko kasus DBD

Januari 2005 kasus DBD tertinggi di kota Surabaya berada pada kecamatan Sawahan, Tambaksari, dan Wonokromo (Gambar 6.5a) dan visualisasi dalam bentuk peta disajikan pada Gambar 6.5b. Sejauh ini, tiga kecamatan tersebut selalu menjadi daerah rawan DBD di kota Surabaya



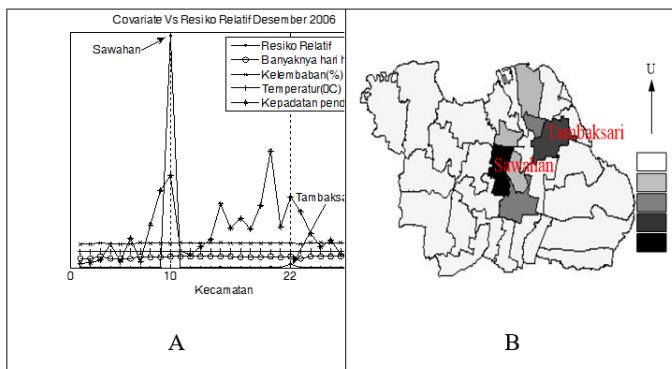
Gambar 6.5. Kasus DBD Januari 2005, (a) Resiko relatif kasus DBD kota Surabaya v.s covariate, (b) peta resiko kasus DBD

Januari 2006 kasus DBD tertinggi di Kota Surabaya masih tetap berada pada kecamatan Sawahan, Tambaksari, dan Wonokromo. Grafik dan peta kasus DBD Januari 2006 di sajikan pada Gambar 6.6.



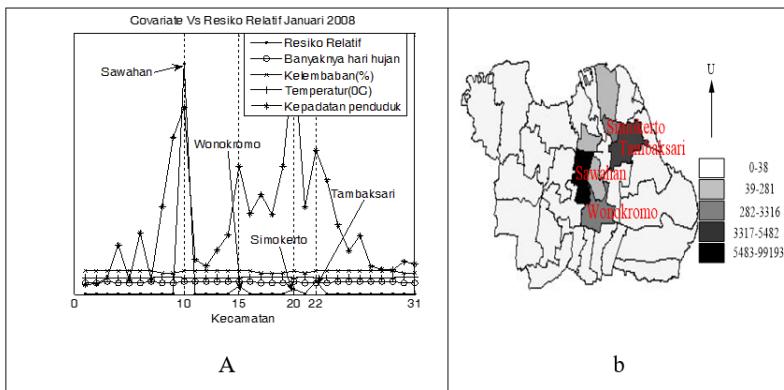
Gambar 6.6. Kasus DBD Januari 2006, (a) Resiko relatif kasus DBD kota Surabaya v.s covariate, (b) peta resiko kasus DBD

Desember 2006 kasus DBD tertinggi di Kota Surabaya kembali berada pada kecamatan Sawahan dan Tambaksari. Grafik dan peta kasus DBD Desember 2006 disajikan pada Gambar 6.7.



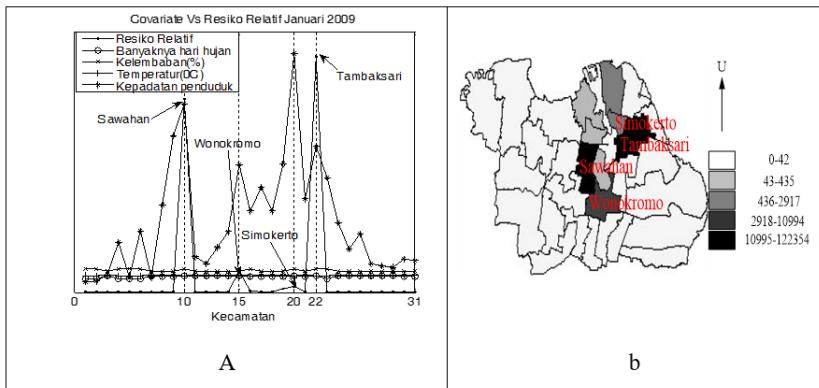
Gambar 6.7. Kasus DBD Desember 2006, (a) Resiko relatif kasus DBD kota Surabaya v.s covariate, (b) peta resiko kasus DBD

Sementara itu, Januari 2008 kasus DBD tertinggi di kota Surabaya masih berada pada kecamatan Sawahan, Wonokromo, dan Tambaksari, serta ada penambahan lokasi yaitu kecamatan Simokerto. Berdasarkan visualisasi dalam bentuk peta (Gambar 6.8b), kasus DBD di kecamatan Simokerto dipengaruhi oleh kecamatan Tambaksari karena kedua kecamatan berbatasan langsung.



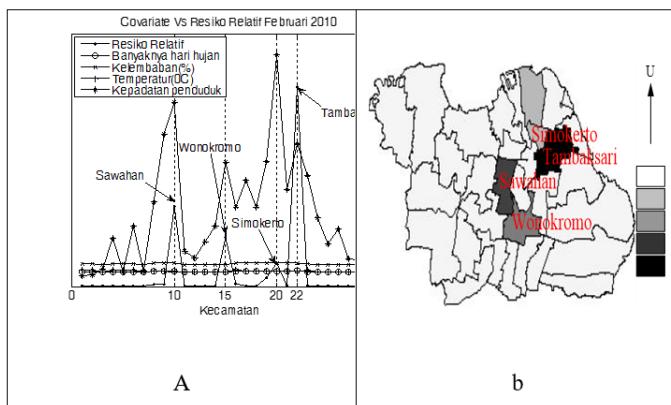
Gambar 6.8. Kasus DBD Januari 2008, (a) Resiko relatif kasus DBD kota Surabaya v.s covariate, (b) peta resiko kasus DBD

Januari 2009 kasus DBD tertinggi di Kota Surabaya berada pada kecamatan Sawahan, Wonokromo, Tambaksari, dan Simokerto (Gambar 6.9a) dan visualisasi dalam bentuk peta di sajikan pada Gambar 6.9b. Kecamatan Simokerto menjadi daerah baru resiko kasus DBD di Kota Surabaya.



Gambar 6.9. Kasus DBD Januari 2009, (a) Resiko relatif kasus DBD kota Surabaya v.s covariate, (b) peta resiko kasus DBD

Februari 2010 kasus DBD tertinggi di kota Surabaya kembali melanda kecamatan Sawahan, Wonokromo, Tambaksari, dan Simokerto (Gambar 6.10a) dan visualisasi dalam bentuk peta di sajikan pada Gambar 6.10b.



Gambar 6.10. Kasus DBD Februari 2010, (a) Resiko relatif kasus DBD kota Surabaya v.s covariate, (b) peta resiko kasus DBD

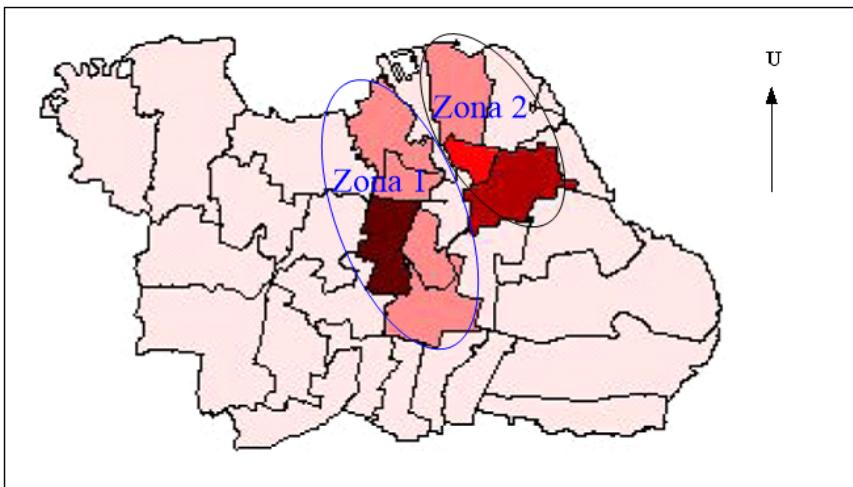
Berdasarkan rangkaian kejadian kasus DBD tertinggi di kota Surabaya periode waktu tahun 2001-tahun 2010, menunjukkan bahwa kecamatan Sawahan, Tambaksari, dan Wonokromo konsisten sebagai lokasi atau area rawan kasus DBD. Sejak tahun 2006, kecamatan Simokerto sebagai area baru rawan kasus DBD di kota Surabaya (Tabel 6.2).

Tabel 6.2. Lokasi rawan kasus DBD di kota Surabaya

Periode infeksi DBD (bulan)	Resiko DBD tertinggi
Desember 2001	Kecamatan Sawahan dan Tambaksari
Januari 2003	Kecamatan Sawahan, Tambaksari, Wonokromo
Januari 2004	Kecamatan Sawahan dan Wonokromo
Januari 2005	Kecamatan Sawahan, Tambaksari, Wonokromo
Januari 2006	Kecamatan Sawahan, Tambaksari, Wonokromo
Desember 2006	Kecamatan Sawahan dan Tambaksari
Januari 2008	Kecamatan Sawahan, Tambaksari, Wonokromo, dan Simokerto
Januari 2009	Kecamatan Sawahan, Tambaksari, Wonokromo, dan Simokerto
Februari 2010	Kecamatan Sawahan, Tambaksari, Wonokromo, dan Simokerto

Berdasarkan *posterior summary* menunjukkan bahwa semakin meningkat kelembaban, banyaknya hari hujan, dan kepadatan penduduk maka akan meningkatkan resiko kasus DBD, sebaliknya semakin meningkatnya temperatur akan menurunkan resiko kasus DBD. Jika diperhatikan dari visualisasi resiko BDB di kota Surabaya dalam bentuk peta maka penyebaran kasus DBD dikelompokkan menjadi dua zona rawan kasus yaitu zona 1 meliputi kecamatan Sawahan dan Wonokromo dan zona 2 yaitu kecamatan Tambaksari dan Simokerto (Gambar 6.11). Kecamatan Sawahan merupakan daerah sumber (atau *hot spot*) penyebab kasus DBD pada zona 1 dan menyebarkan kasus DBD pada kecamatan disekitarnya, terutama menyebar kearah selatan (meliputi kecamatan Wonokromo dan

Tegalsari) dan utara (meliputi kecamatan Bubutan dan Krembangan) kota Surabaya. Zona 2, kecamatan Tambaksari sebagai *hot spot* dan menyebarkan kasus DBD terutama kearah utara (meliputi kecamatan Simokerto dan Semampir) di Kota Surabaya.



Gambar 6.11. Zona rawan kasus DBD di Kota Surabaya

6.3 Studi Simulasi Data

Struktur BP2L S-T dan PBP2L S-T mengandung tiga komponen yaitu komponen efek tetap sebagai prediktor, dua komponen efek random lokal dan global, dan komponen *trend* temporal. Kinerja kedua model ini diuji menggunakan data DBD Kota Surabaya, $S = 31$ kecamatan selama $T=120$ bulan (2001-2010), dengan prediktor kelembaban, temperatur, curah hujan, dan kepadatan penduduk.

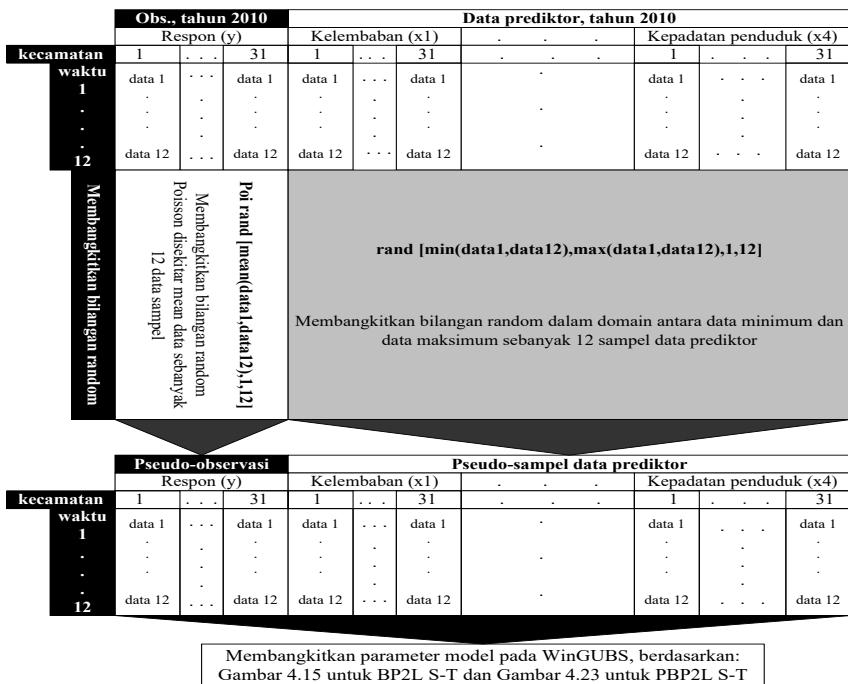
Uji kinerja kedua model ini juga, digunakan data yang dibangkitkan (pseudo-data) untuk $T=12$. Data yang dibangkitkan ini berdasarkan data riil tahun 2010 (12 bulan) Kota Surabaya, baik data observasi maupun data keempat prediktornya agar tetap mempertahankan karakteristik data aslinya. Tujuan dilakukan studi simulasi adalah untuk mempertegas apakah dengan menggunakan

data lain memberikan hasil yang serupa dengan data riil. Prosedur membangkitkan pseudo data mengikuti langkah-langkah berikut:

- 1) Data pseudo-observasi dibangkitkan mengikuti distribusi Poisson sebanyak $y_{st} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, dengan $s = 1, \dots, 31, t = 1, \dots, 12$. Masing-masing data observasi di lokasi s dibangkitkan disekitar meannya dari 12 data yang ada. Misalkan diberikan data untuk lokasi $s = 1$ dengan data adalah $y_1 = [20, 12, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 15]$, maka data pseudo-observasi untuk lokasi $s = 1$ dibangkitkan mengikuti distribusi Poisson disekitar mean dari y_1 sebanyak $T = 12$ sampel data. Proses ini dilakukan serupa untuk seluruh lokasi $s = 1, \dots, 31$.
- 2) Data prediktor sebagai efek tetap yaitu kelembaban, temperatur, curah hujan, dan kepadatan penduduk, masing-masing lokasi dibangkitkan bilangan random sebanyak $x_{pst} \in \square^+$, dengan $p = 1, \dots, 4, s = 1, \dots, 31, t = 1, \dots, 12$. Data prediktor $\mathbf{x}_p, p = 1, \dots, 4$ di lokasi s dibangkitkan bilangan random sebanyak $T = 12$ sampel data dalam domain \mathbf{A} yang mengandung nilai minimum dan maksimumnya masing-masing atau $\mathbf{A} \subset (\min(x_p), \max(x_p))$. Misalkan
 - Data kelembaban (\mathbf{x}_1) untuk lokasi $s = 1$ dibangkitkan bilangan random sebanyak $T = 12$ sampel data dalam domain $\mathbf{A} \subset (\min(x_1), \max(x_1))$.
 - Data temperatur (\mathbf{x}_2) untuk lokasi $s = 1$ dibangkitkan bilangan random sebanyak $T = 12$ sampel data dalam domain $\mathbf{A} \subset (\min(x_2), \max(x_2))$.
 - Data curah hujan (\mathbf{x}_3) untuk lokasi $s = 1$ dibangkitkan bilangan random sebanyak $T = 12$ sampel data dalam domain $\mathbf{A} \subset (\min(x_3), \max(x_3))$.

- Data kepadatan penduduk (x_4) untuk lokasi $s = 1$ dibangkitkan bilangan random sebanyak $T = 12$ sampel data dalam domain $A \subset (\min(x_4), \max(x_4))$.

Proses ini berlaku sama untuk seluruh lokasi $s = 1, 2, \dots, 31$ dalam membangkitkan seluruh sampel data prediktornya. Pseudo-data yang diperoleh ini, kemudian menjadi input data dalam makro program di WinBUGS dengan proses simulasi untuk PBP2L S-T untuk membangkitkan parameter-parameter kedua model. Hasil ini menunjukkan, nilai *deviance* PBP2L S-T selalu lebih kecil dibandingkan *deviance* BP2L S-T.

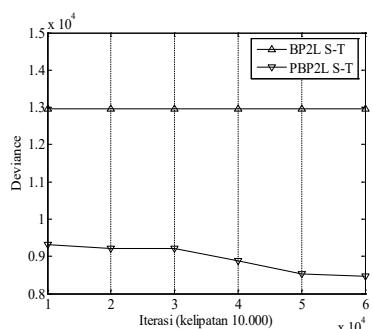


Gambar 6.12. Proses untuk membangkitkan pseudo-observasi dan sampel prediktor

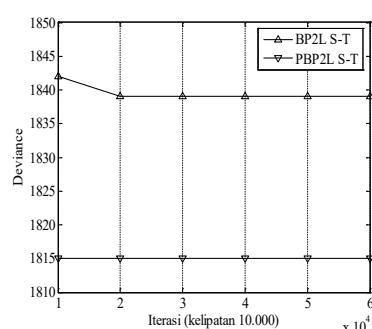
Hasil simulasi untuk mendapatkan nilai *deviance* masing-masing model, baik menggunakan data DBD di 31 kecamatan Kota Surabaya, selama 120 bulan (2001-2010) dan data yang dibangkitkan merupakan profil perubahan nilai *deviance* BP2L S-T dan PBP2L S-T jika masing-masing menggunakan data DBD Kota Surabaya dan data yang dibangkitkan. Hasil ini menunjukkan, nilai *deviance* PBP2L S-T selalu lebih kecil dibandingkan *deviance* BP2L S-T.

Tabel 6.3. Simulasi nilai *deviance* BP2L S-T dan PBP2L S-T menggunakan data DBD Kota Surabaya dan data yang dibangkitkan, setiap 10000 iterasi dilakukan monitoring hasil

Iterasi	Data DBD		Data yang dibangkitkan	
	Deviance BP2L S-T	Deviance PBP2L S-T	Deviance BP2L S-T	Deviance PBP2L S-T
10000	12950	9317	1842	1815
20000	12950	9214	1839	1815
30000	12950	9207	1839	1815
40000	12950	8873	1839	1815
50000	12950	8519	1839	1815
60000	12950	8475	1839	1815



(a)



(b)

Gambar 6.13. Profil perubahan nilai *deviance* BP2L S-T dan PBP2L S-T, (a) menggunakan data DBD Kota Surabaya, (b) menggunakan data yang dibangkitkan

Berdasarkan hasil simulasi menggunakan data yang dibangkitkan, menunjukkan nilai *deviance* PBP2L S-T selalu lebih kecil dari *deviance* BP2L S-T untuk setiap kelipatan 10.000 iterasinya. Hal ini semakin mempertegas, bahwa PBP2L S-T merupakan model terbaik dibandingkan BP2L S-T. Oleh karena itu, untuk mempermudah penulisan PBP2L S-T disebut sebagai *full* model.

DAFTAR PUSTAKA

- Ainsworth, L. M. dan Dean, C. B. (2005). Approximate Inference for Disease Mapping, *Computational Statist.& Data analysis*, Elsevier, 50, 2552-2570, DOI:10.1016/j.csda.2005.05.001.
- Brooks, S. dan Gelman, A. E. (1998). General methods for monitoring convergence of iterative simulations. *Journal of Computational and Graphical Statistics* 7, 434–455.
- Best, and Elliott, P. (2004). Interpreting posterior relative risk estimates in disease mapping studies. *Environmental Health Perspectives* 112, 1016–1025.
- Browne, W. dan Draper, D. (2006). A Comparison of Bayesian and Likelihood-Based Methods for Fitting Multilevel Models, *Bayesian Analysis*, Elsevier, 473-514.
- Carlin, B. P. dan Louis, T. (2000). *Bayes and Empirical Bayes Methods for Data Analysis* (2nd ed.). New York: Chapman & Hall/CRC Press.
- Chowell, G., Cazelles, B., Broutin, H. dan Munayco, C. V. (2011). The influence of geographic and climate factors on the timing of dengue epidemics in Perú, 1994-2008, *BMC Infectious Disease*, Mathematical and Computational Modeling Sciences Center, School of Human Evolution and Social Change, Arizona State University, Tempe, AZ, USA

- Congdon, P. (2007). *Bayesian Statistical Modelling* (2nd ed.). New York: Wiley.
- Cowles, M. K. (2004). Review of WinBUGS 1.4. *The American Statistician* 58, 330–336.
- Dellaportas, P., Forster, J. and Ntzoufras, I. (2002). On Bayesian model and variable selection using MCMC, *Statistics and Computing* 12, 27-36.
- Dinkes (2010). Data kasus DBD perkecamatan perbulan periode 2001-2010, *Dinas Kesehatan kota Surabaya*, Surabaya.
- Eberley, L. and B. P. Carlin (2000). Identifiability and convergence issues for Markov chain Monte Carlo fitting of spatial models. *Statistics in Medicine* 19, 2279–2294.
- Eckert, N., Parent, E., Belanger, L., dan Garcia, S. (2007). Hierarchical Bayesian Modeling for Spatial Analysis of the Number of Avalanche Occurrences at the Scale of the Township, *Journal of Cold Regions Science and Technology*, Elsevier, 97-112, DOI:10.1016/j.coldregions.2007.01.008.
- Elliott, P., J. C. Wakefield, N. G. Best, and D. J. Briggs (Eds.) (2000). *Spatial Epidemiology: Methods and Applications*. London: Oxford University Press.
- Gamerman, D. dan Lopes, H. (2006). *Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference*. New York: CRC Press.
- Gelfand, A. E, Diggle, P. J., Fuentes, M., dan Guttorp, P.(2010). *Handbook of Spatial Statistics*, Chapman & Hall, UK, QA278.2.H3742010
- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., dan Rubin, D. (2004). *Bayesian Data Analysis*. London: Chapman & Hall/CRC press.
- Gelman, A. dan Hill, J. (2007). *Data Analysis Using Regression and Multilevel-Hierarchical Models*. New York: Cambridge University Press.

- Gamerman, D. and Lopes, H. (2006), *Markov Chain Monte Carlo, Texts in Statistical Science*, 2nd ed., Chapman & Hall, New York.
- Gelman, A., Carlin, J., Stem, H. dan Rubin, D. (2004), *Bayesian Data Analysis*, Texts in Statistical Science, 2nd ed., Chapman & Hall, London.
- Ghosh, M., Natarajan, K., Waller, L.A., dan Kim, D.(1999). Hierarchical Bayes GLMs for the Analysis of Spatial Data: An Application to Disease Mapping, *Journal of Statistics Planning Inference*, Elsevier, 75, 305-318, PII:SO378-3758(98)001150-5.
- Goldstein, H. (2011). *Multilevel Statistical Models*, Edward Arnold, London, H61.25.G652010.
- Jin, X., Carlin, B., dan Banerjee, S. (2005). Generalized hierarchical multivariate car models for areal data. *Biometrics* 61, 950–961.
- Karlis, D. dan Ntzoufras, I. (2006). Bayesian analysis of the differences of count data, *Statistics in Medicine* **25**, 1885-1905.
- Lawson, A. B. (2006). *Statistical Methods in Spatial Epidemiology* (2nd ed.). New York: Wiley.
- Lawson, A. B. (2008). *Bayesian Disease Mapping: Hierarchical Modeling in Spatial Epidemiology*, CRC Press, Chapman&Hall, RA792.5.L3872008.
- Lawson, A. B., Browne, W. J., dan Vidal-Rodiero, C. L. (2003). *Disease Mapping with WinBUGS and MLwiN*. New York: Wiley.
- Li, N., Qian, G., dan Huggins, R. (2002). A Random Effects Model for Disease with Heterogeneous Rates of Infection, *Journal of Statistics Planning and Inference*, Elsevier, 116, 317-332.
- Maiti, T.(1998). Hierarchical Bayes Estimation of Mortality Rates for Disease Mapping, *Journal of Statistical Planning and Inference*, Elsevier, 339-348, PII:SO378-3758(97)00165-1.
- Marin, J. M., dan Robert, C. (2007). *Bayesian Core: A Practical Approach to Computational Bayesian Statistics*. New York: Springer.

- Meza, J. L.(2003). Empirical Bayes Estimation Smoothing of Relative Risks in Disease Mapping, *Journal of Statistics Planning and Inference*, Elsevier, 112, 43-62, PII:SO378-3758(02)00322-1.
- Neyens, T., Faes, C., dan Molenberghs, G.(2011). A Generalized Poisson Gamma Model for Spatially Overdispersed Data, *Journal of Spatio temporal Epidemiology*, Elsevier, 1-10, DOI:10.1016/j.sste.2011.10.004.
- Ntzoufras, I.(2009). *Bayesian Modeling Using WinBUGS*, John Wiley&Sons, QA279.5.N892009, New Jersey.
- Pham, H. V., Doan, H. T. M., Phan, T. T. T., dan Minh, N. N. T. (2011). Ecological factors associated with dengue fever in a central highlands Province, Vietnam, *BMC Infectious Disease*, Mathematical and Computational Modeling Sciences Center, School of Human Evolution and Social Change, Arizona State University, Tempe, AZ, USA
- Robert, C., dan Casella, G. (2005). *Monte Carlo Statistical Methods* (2nd ed.). New York: Springer.
- Spiegelhalter, D. J., Best, N. G., Carlin, B. P., dan Van Der Linde, A. (2002). Bayesian deviance, the effective number of parameters and the comparison of arbitrarily complex models. *Journal of the Royal Statistical Society B* 64, 583–640.

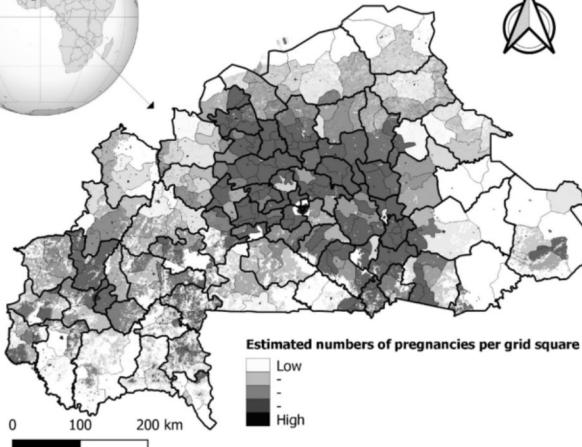
BIOGRAFI PENULIS

Dr. Mukhsar adalah dosen pada program studi statistika FMIPA Universitas Halu Oleo Kendari-Indonesia. Menyelesaikan Program Magister pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada Yogyakarta-Indonesia dan Program Doctoral pada Jurusan Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember, ITS Surabaya-Indonesia. Bidang keahlian adalah pemodelan Bayesian, aplikasi statistika, data driven. Sejumlah tulisan telah dipublikasikan pada jurnal internasional bereputasi dan sering terlibat dalam beberapa riset yang dibiayai oleh pemerintah pusat dan daerah.

Dr. Gusti Ngurah Adhi Wibawa adalah dosen pada program studi statistika FMIPA dan program Pendidikan Vokasi Universitas Halu Oleo Indonesia. Menyelesaikan Program Doktor pada Jurusan Statistika Universitas IPB Indonesia. Bidang keahlian adalah sampling survei, komputasi statistika dan aplikasi statistika. Sejumlah tulisan telah dipublikasikan pada jurnal internasional bereputasi dan sering terlibat dalam beberapa riset yang dibiayai oleh pemerintah pusat dan daerah khususnya pada sektor pendidikan.

Dr. Andi Tenriawaru adalah dosen Ilmu Komputer di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Halu Oleo, Indonesia. Dia menerima gelar sarjananya di Program Studi Informatika, Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, Indonesia; sementara gelar masternya diperoleh dari Departemen Matematika di Institut Teknologi Bandung, Bandung, Indonesia, dan Ph.D. di Departemen Informatika Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, Indonesia. Minat penelitiannya mencakup pemrosesan bahasa alami dan teori graf.

Catatan:



Buku ini merupakan kajian teoritik dan numerik pemodelan Bayesian untuk kasus epidemic yang bervariasi secara spasial dan temporal. Kajian dalam buku ini menguraikan step by step proses penyusunan pemodelan menggunakan metode Bayes termasuk panduan proses pemetaan risiko relatoar kasus epidemic dari hasil analisis yang diperoleh.

Ruang lingkup buku ini, secara umum meliputi dua bagian yaitu kajian teoritik dan kajian numerik atau simulasi. Kajian teoritik berupa penyusunan fungsi densitas berdasarkan distribusi data epidemic, penyusunan fungsi likelihood, penentuan prior, serta penyusunan full conditional distribusi. Distribusi data dapat menggunakan sejumlah software seperti easyfit, minitab atau SPSS. Kajian numeric meliputi penyusunan algoritma berdasarkan full conditional distribusi dan penyusunan makro program menggunakan WinBUGS untuk estimasi parameter model. Pembaca juga bisa menggunakan software lain, misalnya R, Scilab, atau Matlab. Pada akhir pembahasan, menguraikan bagaimana mengetahui kinerja model yang telah disusun. Model dengan kinerja terbaik dan hasil estimasi parameter model, selanjutnya digunakan untuk pemetaan risiko kasus penyakit epidemic secara spasial dan temporal menggunakan ArcView GIS.



Penerbit Adab



@penerbitadab



www.PenerbitAdab.id

Pabean Udk - Indramayu - Jawa Barat

Telp. 081221151025 | penerbitadab@gmail.com

UMUM

ISBN 978-623-497-085-2



9 78623 4970852